

1

〔1〕

(1)

$\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}, \overrightarrow{OC} \neq \vec{0}$ かつ $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{OC}$ より, k を実数として, $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{OC}$ と表される。

$\overrightarrow{AB} = (n-m-2, -n-2m-3, 0)$ より

$$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{OC}$$

$$\Leftrightarrow (n-m-2, -n-2m-3, 0) = (8k, 9k, 0)$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{-17k-5}{3}, n = \frac{7k+1}{3}$$

となる。このとき

$$m+n \geq 100$$

$$\Leftrightarrow \frac{-10k-4}{3} \geq 100$$

$$\Leftrightarrow -304 \geq 10k$$

$$\Leftrightarrow -30.4 \geq k$$

ここで, m, n が整数である為の必要十分条件は,

$$\frac{-17k-5}{3}, \frac{7k+1}{3} \text{ が整数である}$$

$$\Leftrightarrow -17k-5, 7k+1 \text{ が } 3 \text{ の倍数である}$$

$$\Leftrightarrow k-5, k+1 \text{ が } 3 \text{ の倍数である}$$

$$\Leftrightarrow k+1 \text{ が } 3 \text{ の倍数である}$$

$$\Leftrightarrow k \text{ は } 3 \text{ で割ると } 2 \text{ 余る整数である}$$

ことである。ここで, m が最小値を取るのは, k が最大値をとるときである。 $-30.4 \geq k$ かつ k が 3 で割って 2 余る整数であるという条件のもとでの k の最大値は $k = -31$ である。以上より, 求める値は

$$\begin{aligned} (m, n) &= \left(\frac{-17 \cdot (-31) - 5}{3}, \frac{7 \cdot (-31) + 1}{3} \right) \\ &= (174, -72) \end{aligned}$$

である。

(答) $(m, n) = (174, -72)$

(2)

$\overrightarrow{AC} = (-m+6, -n+9, -8), \overrightarrow{BC} = (-n+8, 2m+12, -8)$ である。 $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC} \neq \vec{0}$ であるから,

$$\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BC}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

$$\Leftrightarrow (-m+6)(-n+8) + (-n+9)(2m+12) + (-8) \cdot (-8) = 0$$

$$\Leftrightarrow -mn + 10m - 18n + 220 = 0$$

$$\Leftrightarrow (m+18)(n-10) = 40$$

である。ここで, $m+18, n-10$ は, $m+18 \geq 19, n-10 \geq -9$ を満たす整数である。 $40 = 2^3 \cdot 5$ であるから, 考えられる因数分解は, $(m+18, n-10) = (20, 2), (40, 1)$ である。故に, 求める (m, n) は, $(m, n) = (2, 12), (22, 11)$ である。

(答) $(m, n) = (22, 11), (2, 12)$

〔2〕

(1)

$1 \leq a \leq b \leq c$ より, $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b} \geq \frac{1}{c}$ であるから,

$$1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{3}{a}$$

$$\therefore 3 \geq a$$

である。これと, a が整数であることより, $a = 1, 2, 3$ であることが分かる。

[1] $a = 1$ のとき

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0 \text{ となり, 不適である。}$$

[2] $a = 2$ のとき

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{2}{b} \Leftrightarrow b \leq 4$$

となる。これと, $b \geq a = 2$ であること及び b, c が整数であることより, 求める (b, c) は $(3, 6), (4, 4)$ である。

[3] $a = 3$ のとき

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{2}{b} \Leftrightarrow b \leq 3$$

となる。これと, $b \geq a = 3$ であること及び b, c が整数であることより, 求める (b, c) は $(3, 3)$ である。

以上[1], [2], [3]より, 求める解は $(a, b, c) = (2, 3, 6), (2, 4, 4), (3, 3, 3)$ である。

(答) $(a, b, c) = (2, 3, 6), (2, 4, 4), (3, 3, 3)$

(2)

3個のさいころの出目を大きくない順に a, b, c とおくと, $1 \leq a \leq b \leq c$, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$ を満

たすから, (1) より, 条件を満たす出目の組み合わせは, $(2, 3, 6), (2, 4, 4), (3, 3, 3)$ のいずれかである。3個のさいころを区別すると, 目の出方は全部で $6^3 = 216$ 通りであり, これらは同様に確からしい。 $(2, 3, 6)$ が出るときの目の出方は, $3! = 6$ 通り, $(2, 4, 4)$ が出るときは,

$\frac{3!}{2!} = 3$ 通り, $(3, 3, 3)$ が出るときは, $\frac{3!}{3!} = 1$ 通りである。以上より, 求める確率は,

$$\frac{6+3+1}{216} = \frac{5}{108} \text{ である。}$$

(答) $\frac{5}{108}$

2

〔1〕

解と係数の関係より、 $\alpha + \beta = -6$ かつ $\alpha\beta = s+9$ である。また、 $\angle OAB = \frac{\pi}{3}$ より、

$$\frac{\beta - \alpha}{0 - \alpha} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\therefore \beta = (1 - \chi)\alpha \quad (\chi \text{ は } \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ のいずれかである。})$$

である。これと $\alpha + \beta = -6$ より、 $\alpha = \frac{-6}{2 - \chi}$ 、 $\beta = \frac{-6(1 - \chi)}{2 - \chi}$ である。ここで、 $\chi = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ とすると、

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{-6}{2 - \chi} \\ &= \frac{-6}{\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i} \\ &= -3 - \sqrt{3}i \\ \beta &= (-3 - \sqrt{3}i) \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \\ &= -3 + \sqrt{3}i \end{aligned}$$

である。このとき、 $\arg \alpha > \arg \beta$ であるから、問の条件を満たさない。一方、 $\chi = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ とすると、

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{-6}{2 - \chi} \\ &= \frac{-6}{\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} \\ &= -3 + \sqrt{3}i \\ \beta &= (-3 + \sqrt{3}i) \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \\ &= -3 - \sqrt{3}i \end{aligned}$$

である。このとき $\arg \alpha < \arg \beta$ であり問の条件に合致するから、 $\chi = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ であると分かる。

このとき、

$$\begin{aligned} s &= \alpha\beta - 9 \\ &= (-3 + \sqrt{3}i)(-3 - \sqrt{3}i) - 9 \\ &= 9 + 3 - 9 \\ &= 3 \end{aligned}$$

である。

(答) $s = 3$

〔2〕

点Pは点A、点Bの垂直二等分線上に存在する。ここで、 $\alpha = -3 + \sqrt{3}i$ 、 $\beta = -3 - \sqrt{3}i$ であるから、点A、点Bの垂直二等分線は実軸である。これより、 γ は実数である。ここで、点Pは点A、点Cの垂直二等分線上に存在するから、

$$\begin{aligned} |\alpha - \gamma| &= |-2 + i - \gamma| \\ \Leftrightarrow (3 + \gamma)^2 + 3 &= (2 + \gamma)^2 + 1 \\ \Leftrightarrow \gamma^2 + 6\gamma + 12 &= \gamma^2 + 4\gamma + 5 \\ \Leftrightarrow 2\gamma &= -7 \\ \Leftrightarrow \gamma &= -\frac{7}{2} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\gamma = -\frac{7}{2}$

〔3〕

z の軌跡は点Pと点Q(ti)の垂直二等分線であるから、題意を満たすための必要十分条件は、線分PQの垂直二等分線が円Fに接することである。線分PQと円Fの交点を点Tとすると、点Tは点Pと点Qの中点であるから、

$$\begin{aligned} PT &= \left| \frac{\gamma + ti}{2} - \gamma \right| \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{t^2 + \frac{49}{4}} \end{aligned}$$

である。これと、円Fの半径が

$$\begin{aligned} |\gamma - \alpha| &= \left| -\frac{7}{2} - (-3 + \sqrt{3}i) \right| \\ &= \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + (\sqrt{3})^2} \\ &= \frac{\sqrt{13}}{2} \end{aligned}$$

であることより、

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{13}}{2} &= \frac{\sqrt{t^2 + \frac{49}{4}}}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{13}{4} &= \frac{t^2 + \frac{49}{4}}{4} \\ \Leftrightarrow t^2 &= \frac{3}{4} \\ \Leftrightarrow t &= \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\because t > 0) \end{aligned}$$

となる。

(答) $t = \frac{\sqrt{3}}{2}$

〔4〕

円Fの半径は $\frac{\sqrt{13}}{2}$ であるから、

$$\delta = \gamma + \frac{\sqrt{13}}{2} \cdot \frac{ti - \gamma}{|ti - \gamma|} \left\{ \cos\left(\pm \frac{2}{3}\pi\right) + i \sin\left(\pm \frac{2}{3}\pi\right) \right\} \quad (\text{複号同順})$$

である。ここで、

$$\begin{aligned} \gamma + \frac{\sqrt{13}}{2} \cdot \frac{ti - \gamma}{|ti - \gamma|} \left\{ \cos\left(+\frac{2}{3}\pi\right) + i \sin\left(+\frac{2}{3}\pi\right) \right\} &= -\frac{7}{2} + \left(\frac{7}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\right) \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\ &= -\frac{7}{2} + \left(-\frac{7}{8} - \frac{\sqrt{3}}{8}i + \frac{7\sqrt{3}}{8}i - \frac{3}{8}\right) \\ &= -\frac{19}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{4}i \\ \gamma + \frac{\sqrt{13}}{2} \cdot \frac{ti - \gamma}{|ti - \gamma|} \left\{ \cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right) + i \sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right) \right\} &= -\frac{7}{2} + \left(\frac{7}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\right) \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\ &= -\frac{7}{2} + \left(-\frac{7}{8} - \frac{\sqrt{3}}{8}i - \frac{7\sqrt{3}}{8}i + \frac{3}{8}\right) \\ &= -4 - \sqrt{3}i \end{aligned}$$

より、 $\delta = -\frac{19}{4} + \frac{3}{4}\sqrt{3}i, -4 - \sqrt{3}i$ である。

(答) $\delta = -\frac{19}{4} + \frac{3}{4}\sqrt{3}i, -4 - \sqrt{3}i$

3

【解答】

〔1〕

$$h(x) = f(x) - 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right) \text{ とすると, } 0 < x < 1 \text{ では,}$$

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{2}{(1-x)^2} - 2(1+x^2+x^4) \\ &= \frac{2x^6}{1-x^2} > 0 \end{aligned}$$

となるので, $h(x)$ は $0 < x < 1$ で単調増加である。よって,

$$\begin{aligned} h(x) &> h(0) = 0 \\ \Leftrightarrow f(x) &> 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right) \end{aligned}$$

となり, 与式は示された。

(証明終)

〔2〕

$$(\text{答}) \quad g(x) = \frac{e^x - 1}{1 + e^x}$$

〔3〕

$$g'(x) = \frac{2e^x}{(1+e^x)^2} > 0 \text{ より, } g(x) \text{ は単調増加である。これと } \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 1 \text{ より, } g(x) < 1 \text{ である。}$$

これより,

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_0^t (1 - g(x)) dx \\ &= \int_0^t \frac{2}{1+e^x} dx \\ &= \int_0^t \left(2 - \frac{2e^x}{1+e^x}\right) dx \\ &= \left[2x - 2\log(1+e^x)\right]_0^t \\ &= 2t - 2\log(1+e^t) + 2\log 2 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} S(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} 2\left(\log \frac{1}{1+e^{-t}} + \log 2\right) = 2\log 2 \end{aligned}$$

である。

(答) $2\log 2$

〔4〕

$y' = 2g(x)g'(x)$ より, l の傾きは

$$2g(p)g'(p) = 2 \cdot \frac{e^p - 1}{1 + e^p} \cdot \frac{2e^p}{(1 + e^p)^2}$$

であり, $e^p = P$ とすると, $\frac{4P(P-1)}{(1+P)^3}$ ($=F(P)$ とする) と表される。 p が実数のとき $P > 0$ で

あるから, $P > 0$ で $F(P)$ が最大値をとるときを考える。

$$\begin{aligned} F'(P) &= 4 \cdot \frac{(2P-1)(1+P)^3 - 3P(P-1)(1+P)^2}{(1+P)^6} \\ &= 4 \cdot \frac{(2P-1)(1+P) - 3P(P-1)}{(1+P)^4} \\ &= 4 \cdot \frac{-P^2 + 4P - 1}{(1+P)^4} \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} F'(P) &= 0 \\ \Leftrightarrow -P^2 + 4P - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow P &= 2 \pm \sqrt{3} \end{aligned}$$

となり, これらは $P > 0$ を満たす。これより, 増減表は以下のようになる。

P	(0)	...	$2 - \sqrt{3}$	...	$2 + \sqrt{3}$	...
$F'(P)$	-	-	0	+	0	-
$F(P)$	(0)	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

$$\begin{aligned} F(2 + \sqrt{3}) &= \frac{4(2 + \sqrt{3})(1 + \sqrt{3})}{(3 + \sqrt{3})^3} \\ &= \frac{4(5 + 3\sqrt{3})}{54 + 30\sqrt{3}} \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{5 + 3\sqrt{3}}{9 + 5\sqrt{3}} \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{9} > 0 \end{aligned}$$

より, 求める p の値は $\log(2 + \sqrt{3})$ で, そのときの傾きは $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ である。

(答) l の傾きは $p = \log(2 + \sqrt{3})$ のとき最大値 $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ をとる。

【解説】

〔2〕

$g(x)$ は $f(x)$ の逆関数より,

$$\begin{aligned} x &= \log \frac{1+g(x)}{1-g(x)} \\ \Leftrightarrow \frac{1+g(x)}{1-g(x)} &= e^x \\ \Leftrightarrow (1+e^x)g(x) &= e^x - 1 \\ \Leftrightarrow g(x) &= \frac{e^x - 1}{1 + e^x} \quad (\because 1 + e^x > 0) \end{aligned}$$

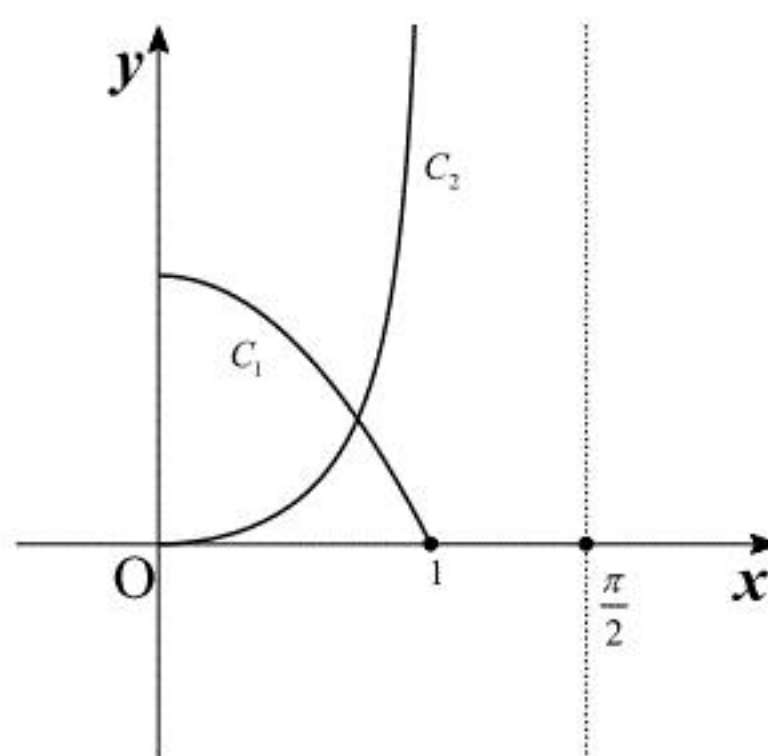
となる。

4

〔1〕

C_2 について、 $0 < t \leq \frac{\pi}{2}$ において、 $\frac{dx}{dt} = -\sin t < 0$ 、 $\frac{dy}{dt} = \frac{-\cos t}{\sin^2 t} < 0$ なので単調増加である。こ

れより、 C_1, C_2 は下図のようになる。



$V_1 + V_2$ は、 C_1 と x 軸と y 軸で囲まれた部分を x 軸のまわりに回転させてできる立体の体積に一致するから、

$$\begin{aligned} V_1 + V_2 &= \pi \int_0^1 \left\{ a(1-x^2) \right\}^2 dx \\ &= a^2 \pi \left[x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 \right]_0^1 \\ &= \frac{8}{15}a^2\pi \end{aligned}$$

となる。以上より、

$$\frac{8}{15}a^2\pi = \frac{128}{15}\pi \Leftrightarrow a = 4 \quad (\because a > 0)$$

である。

答 $a = 4$

〔2〕

$0 \leq \cos t \leq 1$ であることに注意して C_1 と C_2 の式を連立すると、

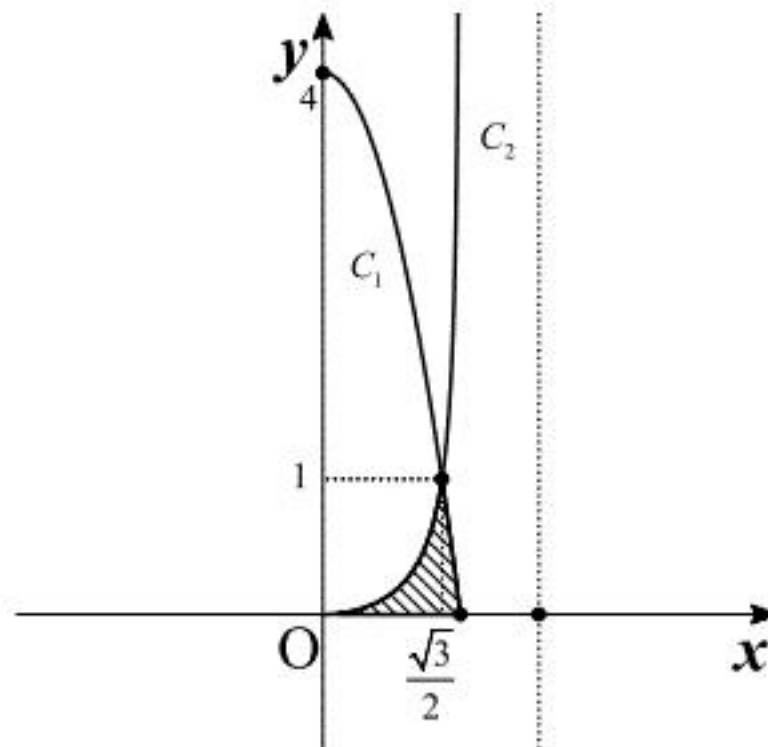
$$\begin{aligned} \frac{1-\sin t}{\sin t} &= 4(1-\cos^2 t) \\ \Leftrightarrow \frac{1-\sin t}{\sin t} &= 4\sin^2 t \\ \Leftrightarrow 4\sin^3 t + \sin t - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (2\sin t - 1)(2\sin^2 t + \sin t + 1) &= 0 \end{aligned}$$

となる。 $0 < \sin t \leq 1$ より、 $\sin t = \frac{1}{2}$ であるから、 $0 < t \leq \frac{\pi}{2}$ と合わせて、 $t = \frac{1}{6}\pi$ である。以上

より、求める座標は、 $\left(\cos \frac{1}{6}\pi, \frac{1-\sin \frac{1}{6}\pi}{\sin \frac{1}{6}\pi} \right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1 \right)$ である。

答 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1 \right)$

〔3〕



C_1, C_2 は上図のようになり、 V_2 は斜線部分を x 軸のまわりに回転させてできる立体の体積である。曲線 C_2 を陽関数で表す方程式を $y = f(x)$ とおくと、

$$V_2 = \pi \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \{f(x)\}^2 dx + \pi \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 \left\{ a(1-x^2) \right\}^2 dx$$

が成立する。

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \{f(x)\}^2 dx &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{1-\sin t}{\sin t} \right)^2 (-\sin t) dt \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1-2\sin t + \sin^2 t}{\sin t} dt \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{1}{\sin t} - 2 + \sin t \right) dt \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\sin t} dt + [-2t - \cos t]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \\ &= -\frac{2}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2} + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin t} dt \end{aligned}$$

である。ここで、 $X = \cos t$ とすると、

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin t} dt &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\sin^2 t} dt \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{1-\cos^2 t} dt \\ &= -\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^0 \frac{1}{1-X^2} dX \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\frac{1}{1+X} + \frac{1}{1-X} \right) dX \\ &= \frac{1}{2} [\log|1+X| - \log|1-X|]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \log \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \\ &= \log(2+\sqrt{3}) \end{aligned}$$

となるので、

$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} y^2 dx = -\frac{2}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2} + \log(2+\sqrt{3})$$

である。また、

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 \left\{ 4(1-x^2) \right\}^2 dx &= 16 \left[x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 \right]_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 \\ &= 16 \left\{ 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{9\sqrt{3}}{160} \right) \right\} \\ &= \frac{128}{15} - \frac{49\sqrt{3}}{10} \end{aligned}$$

となる。以上より、

$$\begin{aligned} V_2 &= \left(-\frac{2}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2} + \log(2+\sqrt{3}) + \frac{128}{15} - \frac{49\sqrt{3}}{10} \right) \pi \\ &= \left(-\frac{2}{3}\pi - \frac{22}{5}\sqrt{3} + \log(2+\sqrt{3}) + \frac{128}{15} \right) \pi \end{aligned}$$

となる。

答 $V_2 = \left(-\frac{2}{3}\pi - \frac{22}{5}\sqrt{3} + \log(2+\sqrt{3}) + \frac{128}{15} \right) \pi$