平成29年度前期日程試験問題

数　　学　(Z)

注　意　事　項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。
2. この問題冊子は，4ページあります。
3. 問題は $\boxed{1}$ ～ $\boxed{4}$ の4題です。全問解答しなさい。
4. 試験開始後に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁がないことを確認し，ある場合には手をあげて監督者に知らせなさい。
5. 問題冊子の針金綴(とじ)は，はずしてもかまいません。問題冊子の余白は下書き，計算用に使用してもかまいません。
6. 解答用紙(別紙)は4枚(Aい～Aに)です。
7. 各解答用紙の指定欄に，受験番号を記入しなさい。
8. 解答は，必ず解答用紙の指定箇所に記入しなさい。
9. 解答用紙は，持ち帰ってはいけません。
10. 試験終了後，問題冊子は持ち帰りなさい。

解答上の注意

11. 解答用紙の「〔1〕　解」，「(2)　解」などで始まる空白部分に，論証過程や計算過程がわかるように解答しなさい。「答」欄には設問の答えを記入しなさい。
12. 設問に「答えのみでよい」という指示のある場合には，「答」欄に設問の答えのみを記入しなさい。

1 次の問いに答えよ。

〔1〕 m, n を整数とし，O を原点とする座標空間に 3 点 $A(m+2, n, 8)$, $B(n, -2m-3, 8)$, $C(8, 9, 0)$ をとる。

（1） $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{OC}$ が平行であり，かつ $m+n \geqq 100$ となるような整数の組 (m, n) のうち，m が最小であるものを求めよ。

（2） $\overrightarrow{AC}$ と $\overrightarrow{BC}$ が垂直となるような正の整数の組 (m, n) をすべて求めよ。

〔2〕（1） a, b, c は整数で，$1 \leqq a \leqq b \leqq c$ を満たすとする。このとき，等式 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=1$ が成り立つような組 (a, b, c) をすべて求めよ。

（2） 3 個のさいころを同時に投げるとき，出る目の逆数の和が 1 となる確率を求めよ。

2 sを正の実数とし，xの2次方程式$x^2+6x+s+9=0$の2つの解をα，βとする。ここで，$0 \leqq \arg\alpha < \arg\beta < 2\pi$とする。複素数平面上の3点O(0)，A($\alpha$)，B($\beta$)に対し，$\angle\mathrm{OAB}=\dfrac{\pi}{3}$であるとする。3点A，B，C($-2+i$)を通る円を$F$とし，円$F$の中心をP($\gamma$)とする。ただし，$i$は虚数単位とする。次の問いに答えよ。

〔1〕 sの値を求めよ。

〔2〕 γの値を求めよ。

〔3〕 tを正の実数とする。$|z-\gamma|=|z-ti|$を満たす点z全体のなす図形が円Fとただ1つの共有点をもつとき，tの値を求めよ。

〔4〕 tを〔3〕で求めた値とし，点Q(ti)をとる。また，R(δ)を円F上の点とする。$\angle\mathrm{QPR}=\dfrac{2}{3}\pi$となるような$\delta$の値をすべて求めよ。

3 関数$f(x)$を

$$f(x)=\log\frac{1+x}{1-x}\quad(-1<x<1)$$

で定め，$f(x)$の逆関数を$g(x)$とする。ただし，対数は自然対数とする。次の問いに答えよ。

〔1〕 $0<x<1$において，不等式

$$f(x)>2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}\right)$$

が成り立つことを示せ。

〔2〕 $g(x)$を求めよ。ただし答えのみでよい。

〔3〕 tを正の実数とする。xy平面において，曲線$y=g(x)$とy軸，および2直線$x=t$，$y=1$で囲まれた部分の面積を$S(t)$とする。$\lim_{t\to\infty}S(t)$を求めよ。

〔4〕 曲線$y=\{g(x)\}^2$上の点$(p,\{g(p)\}^2)$における接線をℓとする。接線ℓの傾きが最大になるpの値と，そのときの傾きを求めよ。

4 a は正の実数とする。xy 平面上に 2 曲線

$$C_1 : y = a(1 - x^2) \quad (0 \leqq x \leqq 1)$$

$$C_2 : x = \cos t,\ y = \frac{1 - \sin t}{\sin t} \quad \left(0 < t \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

がある。y 軸と曲線 C_1 および曲線 C_2 で囲まれた部分を，x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を V_1 とする。また，x 軸と曲線 C_1 および曲線 C_2 で囲まれた部分を，x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を V_2 とする。$V_1 + V_2 = \dfrac{128}{15}\pi$ のとき，次の問いに答えよ。

〔1〕 a の値を求めよ。

〔2〕 曲線 C_1 と曲線 C_2 の交点の座標を求めよ。

〔3〕 V_2 の値を求めよ。