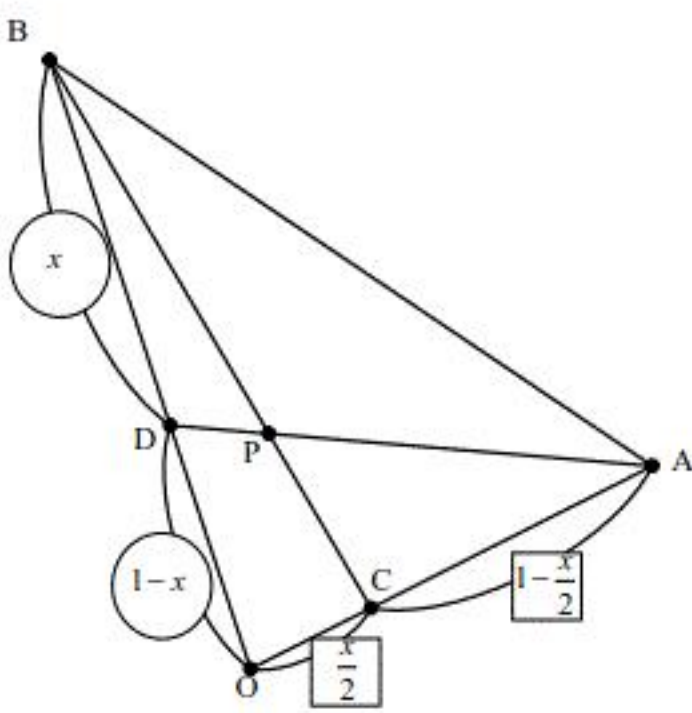


1

[1]



題意より、

$$\overrightarrow{OC} = \frac{x}{2} \vec{a}, \overrightarrow{OD} = (1-x) \vec{b}$$

である。点 P は線分 BC 上に存在するから、0 以上 1 以下のある実数 s を用いて、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= s \overrightarrow{OC} + (1-s) \overrightarrow{OB} \\ &= \frac{sx}{2} \vec{a} + (1-s) \vec{b} \end{aligned}$$

と表される。また、点 P は線分 AD 上に存在するから、0 以上 1 以下のある実数 t を用いて、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= t \overrightarrow{OD} + (1-t) \overrightarrow{OA} \\ &= (1-t) \vec{a} + (1-x)t \vec{b} \end{aligned}$$

と表される。これらより、

$$\frac{sx}{2} \vec{a} + (1-s) \vec{b} = (1-t) \vec{a} + (1-x)t \vec{b}$$

となる。ここで、 $\vec{a}, \vec{b}$ は一次独立であるから、

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \frac{sx}{2} = 1-t \\ 1-s = (1-x)t \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 - \frac{sx}{2} \\ 1-s = (1-x)t \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 - \frac{sx}{2} \\ 1-s = (1-x) \left(1 - \frac{sx}{2} \right) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 - \frac{sx}{2} \\ \frac{x^2 - x + 2}{2} s = x \end{cases} \end{aligned}$$

である。任意の実数 x について、 $x^2 - x + 2 = \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{7}{4} > 0$ が成り立つから、

$$s = \frac{2x}{x^2 - x + 2}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= \frac{sx}{2} \vec{a} + (1-s) \vec{b} \\ &= \frac{x^2}{x^2 - x + 2} \vec{a} + \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - x + 2} \vec{b} \end{aligned}$$

である。

$$(答) \quad \overrightarrow{OP} = \frac{x^2}{x^2 - x + 2} \vec{a} + \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - x + 2} \vec{b}$$

[2]

$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b}$ である。点 P が OM 上に存在するとき、ある実数 k を用いて、 $\overrightarrow{OP} = k \overrightarrow{OM}$ と表

せる。このとき、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= k \overrightarrow{OM} \\ \Leftrightarrow \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - \alpha + 2} \vec{a} + \frac{\alpha^2 - 3\alpha + 2}{\alpha^2 - \alpha + 2} \vec{b} &= k \left(\frac{1}{2} \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b} \right) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - \alpha + 2} = \frac{k}{2} \\ \frac{\alpha^2 - 3\alpha + 2}{\alpha^2 - \alpha + 2} = \frac{k}{2} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - \alpha + 2} = \frac{k}{2} \\ \alpha^2 = \alpha^2 - 3\alpha + 2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{2\alpha^2}{\alpha^2 - \alpha + 2} \\ -3\alpha + 2 = 0 \end{cases} \\ \therefore (\alpha, k) &= \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

であると分かる。以上より、 $\alpha = \frac{2}{3}$ であり、

$$OP : PM = k : (1-k) = 1 : 1$$

である。

$$(答) \quad \alpha = \frac{2}{3}$$

$$OP : PM = 1 : 1$$

[3]

半直線 OP と線分 AB の交点を点 Q とおく。このとき、 $\angle AOQ = \angle BOQ$ であるから、三角形の角の二等分線の性質より、

$$AQ : QB = OA : OB = 6 : 1$$

である。これより、

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{7} \vec{a} + \frac{6}{7} \vec{b}$$

である。ここで、点 P は線分 OQ 上に存在するから、

$$\begin{aligned} \frac{\beta^2}{\beta^2 - \beta + 2} \cdot \frac{\beta^2 - 3\beta + 2}{\beta^2 - \beta + 2} &= \frac{1}{7} \cdot \frac{6}{7} \\ \Leftrightarrow 6\beta^2 &= \beta^2 - 3\beta + 2 \\ \Leftrightarrow 5\beta^2 + 3\beta - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (5\beta - 2)(\beta + 1) &= 0 \\ \therefore \beta &= \frac{2}{5}, -1 \end{aligned}$$

である。これらのうち $0 < \beta < 1$ を満たすのは、 $\beta = \frac{2}{5}$ である。

$$(答) \quad \beta = \frac{2}{5}$$

[4]

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= OA \cdot OB \cdot \cos \angle AOB \\ &= 2 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{4} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

である。以上より、 $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ であることに注意すれば、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &\perp \overrightarrow{AB} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AB} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{\gamma^2}{\gamma^2 - \gamma + 2} \vec{a} + \frac{\gamma^2 - 3\gamma + 2}{\gamma^2 - \gamma + 2} \vec{b} \right) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) &= 0 \\ \Leftrightarrow \{ \gamma^2 \vec{a} + (\gamma^2 - 3\gamma + 2) \vec{b} \} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) &= 0 \\ \Leftrightarrow -4\gamma^2 + (\gamma^2 - 3\gamma + 2) + (3\gamma - 2) \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2\gamma^2 + 3\gamma - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (2\gamma - 1)(\gamma + 2) &= 0 \\ \therefore \gamma &= \frac{1}{2}, -2 \end{aligned}$$

であると分かる。これらのうち $0 < \gamma < 1$ を満たすのは、 $\gamma = \frac{1}{2}$ である。

$$(答) \quad \gamma = \frac{1}{2}$$

〔1〕

$$\begin{aligned}
 a_{n+1} &= \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2} \\
 \Leftrightarrow a_{n+1} - 1 &= \frac{1}{2}(a_n - 1)
 \end{aligned}$$

であるから、数列 $\{a_n - 1\}$ は公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列である。よって、

$$\begin{aligned}
 a_n - 1 &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} (a_1 - 1) \\
 \Leftrightarrow a_n &= 1 + 6\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\
 \Leftrightarrow a_n &= \frac{3}{2^{n-2}} + 1
 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad a_n = \frac{3}{2^{n-2}} + 1$$

〔2〕

与えられた漸化式 $f_{n+1}(x) = a_{n+1}x + \frac{1}{2}\int_0^1 f_n(t)dt$ を辺々 $0 \leq x \leq 1$ で積分すると、

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 f_{n+1}(x)dx &= \int_0^1 a_{n+1}x dx + \int_0^1 \left\{ \frac{1}{2} \int_0^1 f_n(t)dt \right\} dx \\
 &= \left[\frac{a_{n+1}}{2} x^2 \right]_0^1 + \left[\left\{ \frac{1}{2} \int_0^1 f_n(t)dt \right\} x \right]_0^1 \\
 &= \frac{a_{n+1}}{2} + \frac{1}{2} \int_0^1 f_n(t)dt
 \end{aligned}$$

$$\therefore \int_0^1 f_{n+1}(t)dt = \frac{a_{n+1}}{2} + \frac{1}{2} \int_0^1 f_n(t)dt \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

となる。また、

$$\begin{aligned}
 b_n &= 2^n \int_0^1 f_n(t)dt \\
 \Leftrightarrow \int_0^1 f_n(t)dt &= \frac{b_n}{2^n}
 \end{aligned}$$

である。これを、 $\textcircled{1}$ に代入すると、

$$\begin{aligned}
 \frac{b_{n+1}}{2^{n+1}} &= \frac{a_{n+1}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{b_n}{2^n} \\
 \Leftrightarrow \frac{b_{n+1}}{2^{n+1}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2^{n-1}} + 1 \right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{b_n}{2^n} \\
 \Leftrightarrow b_{n+1} &= b_n + 2^n + 6
 \end{aligned}$$

が得られる。ここで、

$$b_1 = 2 \int_0^1 a_1 t dt = 2 \left[\frac{a_1}{2} t^2 \right]_0^1 = a_1 = 7$$

であるから、 $n \geq 2$ のときの $\{b_n\}$ の一般項は、

$$\begin{aligned}
 b_n &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (2^k + 6) \\
 &= 7 + \frac{1-2^{n-1}}{1-2} \cdot 2 + 6(n-1) \\
 &= 2^n + 6n - 1
 \end{aligned}$$

となる。これは、 $n=1$ を代入しても成り立つ。

$$(\text{答}) \quad b_n = 2^n + 6n - 1$$

〔3〕

$n=1$ のときは、 $f_1(x) = 7x$ であるから、

$$\begin{aligned}
 f_1(x) &= 0 \\
 \Leftrightarrow x &= 0
 \end{aligned}$$

である。 $n \geq 2$ のとき、

$$\begin{aligned}
 f_n(x) &= a_n x + \frac{1}{2} \int_0^1 f_{n-1}(t)dt \\
 &= \left(\frac{3}{2^{n-2}} + 1 \right) x + \frac{b_{n-1}}{2^n} \\
 &= \left(\frac{3}{2^{n-2}} + 1 \right) x + \frac{1}{2} + \frac{6n-7}{2^n}
 \end{aligned}$$

であるから、 $\frac{3}{2^{n-2}} + 1 > 0$ であることにも注意すれば、

$$\begin{aligned}
 f_n(x) &= 0 \\
 \Leftrightarrow x &= -\frac{\frac{1}{2} + \frac{6n-7}{2^n}}{\frac{3}{2^{n-2}} + 1} \\
 &= -\frac{2^{n-1} + 6n - 7}{2^n + 12}
 \end{aligned}$$

となる。これは、 $n=1$ を代入しても成り立つ。

$$(\text{答}) \quad x = -\frac{2^{n-1} + 6n - 7}{2^n + 12}$$

3

〔1〕

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + \frac{1}{2} \cdot (4x^2 + 1)' \cdot \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 1}} \\ &= 1 + \frac{1}{2} \cdot 8x \cdot \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 1}} \\ &= \frac{4x}{\sqrt{4x^2 + 1}} + 1 \end{aligned}$$

である。上式より、 $x \geq 0$ では常に $f'(x) > 0$ である。 $x < 0$ のもとでは、

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{4x}{\sqrt{4x^2 + 1}} &= -1 \\ \Leftrightarrow 16x^2 &= 4x^2 + 1 \\ \Leftrightarrow x^2 &= \frac{1}{12} \\ \therefore x &= -\frac{\sqrt{3}}{6} \end{aligned}$$

である。以上より、 $f(x)$ の増減は下表の通りとなる。

x	...	$-\frac{\sqrt{3}}{6}$	...	0	...
$f'(x)$	-	0	+	+	+
$f(x)$	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	1	$\nearrow$

以上より、 $f(x)$ は、 $x = -\frac{\sqrt{3}}{6}$ で最小値 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ をとる。

$$\text{(答)} \quad x = -\frac{\sqrt{3}}{6} \text{ のとき最小値 } \frac{\sqrt{3}}{2}$$

〔2〕 (1)

$$\begin{aligned} y - f(p) &= f'(p)(x - p) \\ \Leftrightarrow y - p - \sqrt{4p^2 + 1} &= \left(\frac{4p}{\sqrt{4p^2 + 1}} + 1 \right) (x - p) \\ \Leftrightarrow y &= \left(\frac{4p}{\sqrt{4p^2 + 1}} + 1 \right) x + \frac{1}{\sqrt{4p^2 + 1}} \end{aligned}$$

である。

$$\text{(答)} \quad y = \left(\frac{4p}{\sqrt{4p^2 + 1}} + 1 \right) x + \frac{1}{\sqrt{4p^2 + 1}}$$

(2)

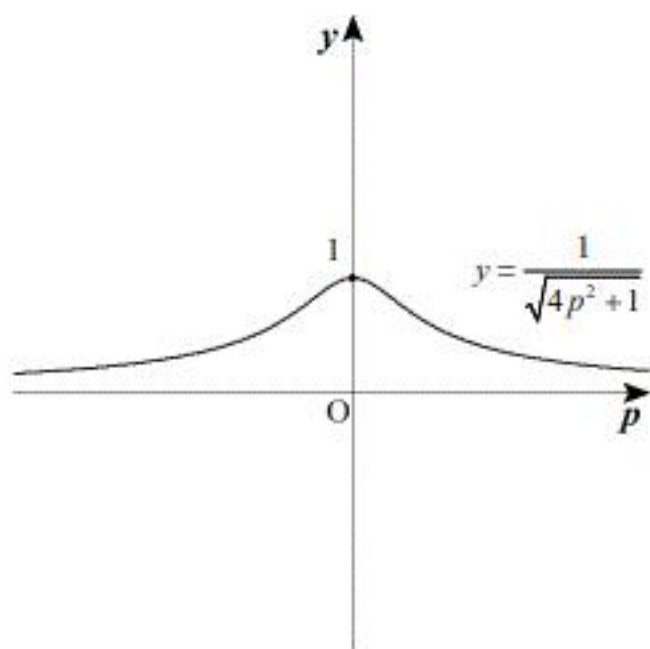
(1)より、点 $(p, f(p))$ における C の接線が点 $(0, q)$ を通るのは、

$$q = \frac{1}{\sqrt{4p^2 + 1}}$$

が成立するときである。ここで、 $q(p) = \frac{1}{\sqrt{4p^2 + 1}}$ とすると、 $q(-p) = q(p)$ より、 $q(p)$ は p についての偶関数であり、 $p > 0$ で減少する。また、

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{4p^2 + 1}} = 0$$

であるから、対称性より、 py 平面上の曲線 $y = \frac{1}{\sqrt{4p^2 + 1}}$ の概形は下図の通りとなる。



ここで、各 q に対し、点 $(0, q)$ を通る C の接線の本数は、直線 $y = q$ と曲線 $y = \frac{1}{\sqrt{4p^2 + 1}}$ の交点

の本数に等しい。以上より、点 $(0, q)$ を通る C の接線の本数は、 $0 < q < 1$ では2本、 $q = 1$ では1本、

それ以外では0本である。

$$\begin{array}{lll} \text{(答)} & 0 < q < 1 \text{ のとき} & 2 \text{ 本} \\ & q = 1 \text{ のとき} & 1 \text{ 本} \\ & q \leq 0, q > 1 \text{ のとき} & 0 \text{ 本} \end{array}$$

〔3〕

$a < 0$ のときは $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ かつ $\lim_{x \rightarrow \infty} ax = -\infty$ であるから、 $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax] = 0$ となることは無い。

以上より、 $a \geq 0$ の場合のみ考えればよい。 $x > 0$ のもとで、

$$\begin{aligned} f(x) - ax &= (1-a)x + \sqrt{4x^2 + 1} \\ &= \frac{(1-a)^2 x^2 - 4x^2 - 1}{(1-a)x - \sqrt{4x^2 + 1}} \\ &= \frac{(a^2 - 2a - 3)x^2 - 1}{(1-a)x - \sqrt{4x^2 + 1}} \\ &= \frac{(a-3)(a+1)x^2 - 1}{(1-a)x - \sqrt{4x^2 + 1}} \\ &= \frac{(a-3)(a+1)x - \frac{1}{x}}{(1-a) - \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}}} \end{aligned}$$

であるから、 $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax] = 0$ となるには、 $(a-3)(a+1) = 0$ が必要である。 $a \geq 0$ のもとで

$(a-3)(a+1) = 0$ となるのは、 $a = 3$ のときである。逆に、 $a = 3$ のとき、

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax] &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{x}}{-2 - \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}}} \\ &= \frac{0}{-2 - \sqrt{4 + 0}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

である。以上より、 $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax] = 0$ を満たす定数 a は、 $a = 3$ である。

$$\text{(答)} \quad a = 3$$

〔1〕 (1)

$$\int \sin x \sin 2x \, dx = \int 2 \sin^2 x \cos x \, dx$$

である。 $\sin x = t$ とすると、 $\frac{dt}{dx} = \cos x$ であるから、

$$\begin{aligned} \int 2 \sin^2 x \cos x \, dx &= \int 2 \sin^2 x \cdot \frac{dt}{dx} \, dx \\ &= \int 2t^2 \, dt \\ &= \frac{2}{3} t^3 + C \\ &= \frac{2}{3} \sin^3 x + C \end{aligned}$$

となる。ただし、 C は積分定数である。よって、

$$\int \sin x \sin 2x \, dx = \frac{2}{3} \sin^3 x + C$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \int \sin x \sin 2x \, dx = \frac{2}{3} \sin^3 x + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

(2)

C を積分定数として、部分積分法を用いると、

$$\begin{aligned} \int x \sin nx \, dx &= \int x \left(-\frac{\cos nx}{n} \right)' \, dx \\ &= -\frac{1}{n} x \cos nx + \frac{1}{n} \int \cos nx \, dx \\ &= -\frac{1}{n} x \cos nx + \frac{1}{n^2} \sin nx + C \end{aligned}$$

と求められる。

$$(\text{答}) \quad \int x \sin nx \, dx = -\frac{1}{n} x \cos nx + \frac{1}{n^2} \sin nx + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

〔2〕

$$(x + a \sin x + b \sin 2x)^2 = x^2 + a^2 \sin^2 x + b^2 \sin^2 2x + 2ax \sin x + 2bx \sin 2x + 2ab \sin x \sin 2x$$

であるから、

$$\begin{aligned} \int_0^\pi (x + a \sin x + b \sin 2x)^2 \, dx \\ = \int_0^\pi (x^2 + a^2 \sin^2 x + b^2 \sin^2 2x + 2ax \sin x + 2bx \sin 2x + 2ab \sin x \sin 2x) \, dx \end{aligned}$$

である。ここで、

$$\begin{aligned} \int_0^\pi x^2 \, dx &= \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^\pi \\ &= \frac{\pi^3}{3} \\ \int_0^\pi a^2 \sin^2 x \, dx &= a^2 \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx \\ &= \frac{a^2}{2} \left[x - \frac{\sin 2x}{2} \right]_0^\pi \\ &= \frac{\pi}{2} a^2 \\ \int_0^\pi b^2 \sin^2 2x \, dx &= b^2 \int_0^\pi \frac{1 - \cos 4x}{2} \, dx \\ &= \frac{b^2}{2} \left[x - \frac{\sin 4x}{4} \right]_0^\pi \\ &= \frac{\pi}{2} b^2 \end{aligned}$$

である。また、〔1〕より、

$$\begin{aligned} \int_0^\pi 2ax \sin x \, dx &= 2a \left[-x \cos x + \sin x \right]_0^\pi \\ &= 2\pi a \\ \int_0^\pi 2bx \sin 2x \, dx &= 2b \left[-\frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x \right]_0^\pi \\ &= -\pi b \\ \int_0^\pi 2ab \sin x \sin 2x \, dx &= 2ab \left[\frac{2}{3} \sin^3 x \right]_0^\pi \\ &= 0 \end{aligned}$$

である。以上より、

$$\begin{aligned} \int_0^\pi (x + a \sin x + b \sin 2x)^2 \, dx &= \frac{\pi}{2} a^2 + 2\pi a + \frac{\pi}{2} b^2 - \pi b + \frac{\pi^3}{3} \\ &= \frac{\pi}{2} (a+2)^2 + \frac{\pi}{2} (b-1)^2 - \frac{5}{2} \pi + \frac{\pi^3}{3} \end{aligned}$$

である。これは、 $a = -2, b = 1$ のとき、最小値 $-\frac{5}{2}\pi + \frac{\pi^3}{3}$ をとる。

$$(\text{答}) \quad a = -2, b = 1 \text{ のとき最小値 } -\frac{5}{2}\pi + \frac{\pi^3}{3}$$