

1

[1]

Sは直線PQ上の点であるから、実数 a を用いて、

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OP} + a\overrightarrow{PQ}$$

と表せる。よって、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OS} &= (3\cos t, 3\sin t, 0) + a(-\sin 2t - 3\cos t, -\cos 2t - 3\sin t, 1) \\ &= (3\cos t - a(\sin 2t + 3\cos t), 3\sin t - a(\cos 2t + 3\sin t), a)\end{aligned}$$

となる。ここで、点Sの z 座標が $\frac{2}{3}$ であることから、 $a = \frac{2}{3}$ であり、これを上式に代入すると、

$$\overrightarrow{OS} = \left(\cos t - \frac{2}{3}\sin 2t, \sin t - \frac{2}{3}\cos 2t, \frac{2}{3} \right)$$

と表せる。よって、点Sの座標は

$$S\left(\cos t - \frac{2}{3}\sin 2t, \sin t - \frac{2}{3}\cos 2t, \frac{2}{3} \right)$$

である。

$$\text{の(答) } S\left(\cos t - \frac{2}{3}\sin 2t, \sin t - \frac{2}{3}\cos 2t, \frac{2}{3} \right)$$

[2]

[1]の結果および三角関数の加法定理より、

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{OS}| &= \sqrt{\left(\cos t - \frac{2}{3}\sin 2t \right)^2 + \left(\sin t - \frac{2}{3}\cos 2t \right)^2 + \left(\frac{2}{3} \right)^2} \\ &= \sqrt{1 + \frac{4}{9} + \frac{4}{9} - \frac{4}{3}(\cos t \sin 2t + \sin t \cos 2t)} \\ &= \sqrt{\frac{17}{9} - \frac{4}{3}\sin 3t}\end{aligned}$$

と表せる。 $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ より $0 \leq 3t \leq \frac{3}{2}\pi$ であるから、 $-1 \leq \sin 3t \leq 1$ である。このとき、ベク

トル $\overrightarrow{OS}$ の大きさは、 $\sin 3t = 1$ 、すなわち $t = \frac{\pi}{6}$ のときに最小値 $\frac{\sqrt{5}}{3}$ を取り、 $\sin 3t = -1$ 、すな

わち $t = \frac{\pi}{2}$ のときに最大値 $\frac{\sqrt{29}}{3}$ を取る。

$$\text{(答) 最大値: } \frac{\sqrt{29}}{3} \left(t = \frac{\pi}{2} \right), \text{ 最小値: } \frac{\sqrt{5}}{3} \left(t = \frac{\pi}{6} \right)$$

[3]

直線ORが平面OPQと垂直であるとき、 $\overrightarrow{OR} \cdot \overrightarrow{OP} = 0$, $\overrightarrow{OR} \cdot \overrightarrow{OQ} = 0$ である。よって、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OR} \cdot \overrightarrow{OP} &= 0 \\ \Leftrightarrow (1, -1, 1) \cdot (3\cos t, 3\sin t, 0) &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos t - \sin t &= 0 \\ \Leftrightarrow \sqrt{2} \sin \left(t + \frac{3}{4}\pi \right) &= 0 \\ \therefore t &= \frac{1}{4}\pi \quad (0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}) \\ \overrightarrow{OR} \cdot \overrightarrow{OQ} &= 0 \\ \Leftrightarrow (1, -1, 1) \cdot (-\sin 2t, -\cos 2t, 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow -\sin 2t + \cos 2t + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \sqrt{2} \sin \left(2t + \frac{3}{4}\pi \right) &= -1 \\ \therefore t &= \frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\pi \quad (\because 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2})\end{aligned}$$

となる。したがって、直線ORが平面OPQと垂直であるとき、 $t = \frac{1}{4}\pi$ である。このとき、点

P, Qはそれぞれ、 $P\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}, 0 \right)$, $Q(-1, 0, 1)$ であるから、 $\triangle OPQ$ の面積は、

$$\begin{aligned}\triangle OPQ &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{OP}|^2 |\overrightarrow{OQ}|^2 - (\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{9 \cdot 2 - \frac{9}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{27}{2}} \\ &= \frac{3\sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$

である。また、 $|\overrightarrow{OR}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$ であるから、四面体OPQRの体積は

$$\frac{1}{3} \cdot \triangle OPQ \cdot OR = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{6}}{4} \cdot \sqrt{3} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

である。

$$\text{(答) } t = \frac{\pi}{4}, \text{ 四面体OPQRの体積: } \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

[1]

複素数 z を極形式で表すと

$$z = \frac{3}{2}(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$$

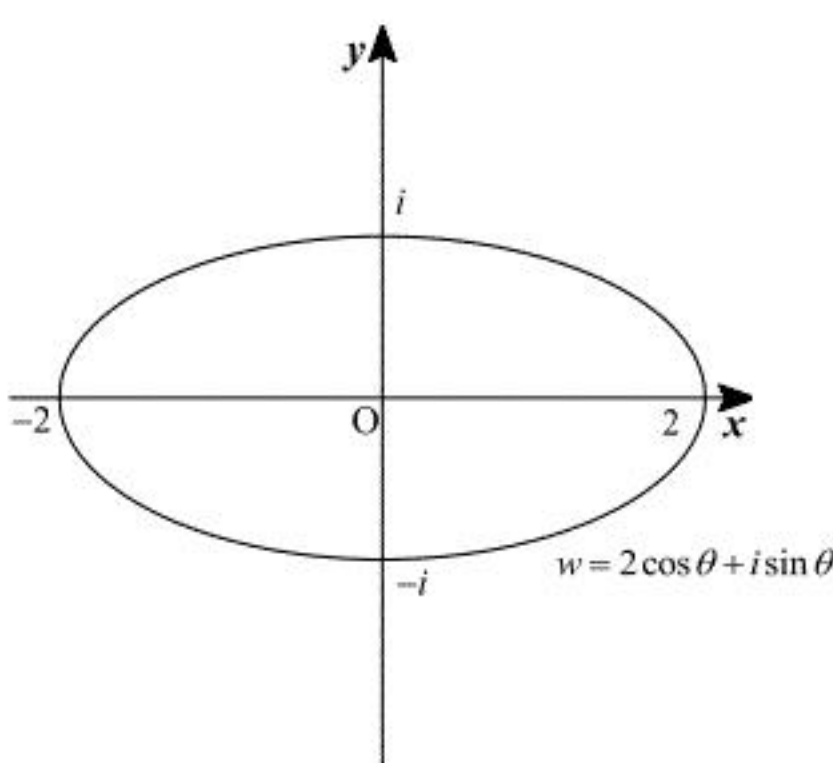
となる。このとき複素数 w は

$$\begin{aligned} w &= z + \frac{3}{4z} \\ &= \frac{3}{2}(\cos \theta + i \sin \theta) + \frac{3}{4 \cdot \frac{3}{2}(\cos \theta + i \sin \theta)} \\ &= \frac{3}{2}(\cos \theta + i \sin \theta) + \frac{\cos \theta - i \sin \theta}{2} \\ &= 2 \cos \theta + i \sin \theta \end{aligned}$$

と表せる。したがって、 $w = x + iy$ について、

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

が成立するから、図形 F を図示すると、以下のような楕円が得られる。



(答) 前図

[2] (1)

条件より、正の実数 x, y を用いて $\alpha = x + iy$ と表せる。点 A が図形 F 上にあるとき、[1] の結果より、 x, y は

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

を満たす。また、 $\angle PAQ = \frac{\pi}{2}$ を満たすとき、点 A は複素数平面上において線分 PQ を直径とする円の周上にあるから、 x, y は

$$x^2 + y^2 = 3 \quad \dots \textcircled{2}$$

を満たす。② - ① より、

$$\begin{aligned} \frac{3}{4}x^2 = 2 &\Leftrightarrow x = \frac{2\sqrt{6}}{3} \quad (\because 0 < x) \\ y^2 = 3 - x^2 &\Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (\because 0 < y) \end{aligned}$$

であるから、題意の条件を満たすとき、 $\alpha = \frac{2\sqrt{6} + \sqrt{3}i}{3}$ である。

$$(答) \quad \alpha = \frac{2\sqrt{6} + \sqrt{3}i}{3}$$

(2)

$\alpha = \beta + \frac{3}{4\beta}$ を満たすとき、

$$\begin{aligned} \alpha &= \beta + \frac{3}{4\beta} \\ \Leftrightarrow \beta^2 - \alpha\beta + \frac{3}{4} &= 0 \quad \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

と変形できる。 α は図形 F 上の点 A を表す複素数であるから、 $\alpha = 2 \cos \theta + i \sin \theta$ と表せることに注意すると、[2] の結果より、

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{6}}{3}, \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

である。ここで、[1] より、

$$z = \frac{3}{2}(\cos \theta + i \sin \theta) = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

は、③の解の1つである。したがって、③の左辺は $\beta - \left(\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ で割り切れるため、

$$\begin{aligned} \beta^2 - \alpha\beta + \frac{3}{4} &= 0 \\ \Leftrightarrow \beta^2 - \left(\frac{2\sqrt{6}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}i\right)\beta + \frac{3}{4} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(\beta - \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\beta - \frac{\sqrt{6}}{6} + \frac{\sqrt{3}}{6}i\right) &= 0 \end{aligned}$$

と変形できる。ここで、 $\beta = \frac{\sqrt{6}}{6} - \frac{\sqrt{3}}{6}i$ は、 $|\beta| = \frac{1}{2}$ より円 C 上にはないため、求める点 β は、

$$\beta = \frac{\sqrt{6}}{6} - \frac{\sqrt{3}}{6}i \text{ である。}$$

$$(答) \quad \beta = \frac{\sqrt{6}}{6} - \frac{\sqrt{3}}{6}i$$

[1]

$C: y = \frac{1}{2}(\log x)^2$ について,

$$y' = \frac{\log x}{x}$$

$$y'' = \frac{1 - \log x}{x^2}$$

である。したがって、 C の $0 < x$ の範囲における増減表は以下のようになる。

x	(0)	...	1	...	e	...
y'		-	0	+		+
y''		+		+	0	-
y		↘	0	↗	$\frac{1}{2}$	↗

上表より、変曲点は $\left(e, \frac{1}{2}\right)$ であり、凹凸は $0 < x < e$ で下に凸、 $e < x$ で上に凸である。

(答) $0 < x < e$: 下に凸, $e < x$: 上に凸, 変曲点: $\left(e, \frac{1}{2}\right)$

[2]

$y' = \frac{\log x}{x}$ であることから、 $\left(t, \frac{1}{2}(\log t)^2\right)$ における接線の方程式は

$$y = \frac{\log t}{t}(x-t) + \frac{1}{2}(\log t)^2$$

$$= \frac{\log t}{t}x + \frac{1}{2}(\log t)^2 - \log t$$

である。また、法線の方程式は $0 < t < 1, 1 < t$ のとき

$$y = -\frac{t}{\log t}(x-t) + \frac{1}{2}(\log t)^2$$

$$= -\frac{tx}{\log t} + \frac{1}{2}(\log t)^2 + \frac{t^2}{\log t}$$

であり、 $t=1$ のとき $x=t=1$ である。

(答) 接線: $y = \frac{\log t}{t}x + \frac{1}{2}(\log t)^2 - \log t$, 法線: $y = -\frac{tx}{\log t} + \frac{1}{2}(\log t)^2 + \frac{t^2}{\log t}$ ($t \neq 1$), $x=1$ ($t=1$)

[3]

$P\left(\sqrt{e}, \frac{1}{8}\right)$ を通り、 x 軸と接する円の中心の座標を (p, q) とすると、

$$\left(\sqrt{e}-p\right)^2 + \left(\frac{1}{8}-q\right)^2 = q^2$$

$$\Leftrightarrow p^2 - 2p\sqrt{e} - \frac{1}{4}q + e + \frac{1}{64} = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

が成立する。また、①を満たす円の中心が、曲線 C の $P\left(\sqrt{e}, \frac{1}{8}\right)$ における法線上に存在することから、[2] より、

$$q = \frac{-\sqrt{e}p}{\frac{1}{2}} + \frac{1}{8} + \frac{e}{\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow q = -2p\sqrt{e} + 2e + \frac{1}{8} \quad \dots \textcircled{2}$$

を満たす。②を①に代入すると、

$$p^2 - 2p\sqrt{e} - \frac{1}{4}\left(-2p\sqrt{e} + 2e + \frac{1}{8}\right) + e + \frac{1}{64} = 0$$

$$\Leftrightarrow p^2 - \frac{3}{2}p\sqrt{e} + \frac{1}{2}e - \frac{1}{64} = 0$$

が得られ、この2次方程式の2実数解が Q_1, Q_2 の x 座標である。よって、 $Q_1(p_1, q_1)$ および $Q_2(p_2, q_2)$ とおくと、解と係数の関係より、

$$p_1 + p_2 = \frac{3\sqrt{e}}{2}$$

を満たす。ここで、求める線分 Q_1Q_2 の長さは、2つの円の半径の長さの和であることから、

$$Q_1Q_2 = q_1 + q_2$$

$$= -2\sqrt{e}(p_1 + p_2) + 2\left(2e + \frac{1}{8}\right)$$

$$= e + \frac{1}{4}$$

である。

(答) $e + \frac{1}{4}$

[1]

$0 \leq t \leq 1$ のとき, $e' > 0$ および

$$t^2 - 2xt + x^2 - 1 = (t-x)^2 - 1$$

と変形できることから,

$$\left| e' (t^2 - 2xt + x^2 - 1) \right| = \begin{cases} e' \left\{ (t-x)^2 - 1 \right\} & (t \leq x-1, x+1 \leq t) \\ -e' \left\{ (t-x)^2 - 1 \right\} & (x-1 < t < x+1) \end{cases}$$

である。積分定数を C として, $e' \left\{ (t-x)^2 - 1 \right\}$ の不定積分を計算すると,

$$\begin{aligned} \int e' \left\{ (t-x)^2 - 1 \right\} dt &= e' \left\{ (t-x)^2 - 1 \right\} - 2 \int e' (t-x) dt \\ &= e' \left\{ (t-x)^2 - 1 \right\} - 2e' (t-x) + 2 \int e' dt \\ &= e' \left\{ (t-x)^2 - 2(t-x) + 1 \right\} + C \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{3}{2}\right) &= \int_0^1 \left| e' \left\{ \left(t - \frac{3}{2}\right)^2 - 1 \right\} \right| dt \\ &= \left[e' \left\{ \left(t - \frac{3}{2}\right)^2 - 2\left(t - \frac{3}{2}\right) + 1 \right\} \right]_0^{\frac{1}{2}} - \left[e' \left\{ \left(t - \frac{3}{2}\right)^2 - 2\left(t - \frac{3}{2}\right) + 1 \right\} \right]_{\frac{1}{2}}^1 \\ &= e^{\frac{1}{2}} \cdot 4 - e^0 \left(\frac{9}{4} + 4 \right) - e^1 \left(\frac{1}{4} + 2 \right) + e^{\frac{1}{2}} \cdot 4 \\ &= 8\sqrt{e} - \frac{9}{4}e - \frac{25}{4} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad 8\sqrt{e} - \frac{9}{4}e - \frac{25}{4}$$

[2]

x の値によって場合分けをして考える。

[1] $-1 \leq x < 0$ のとき

$0 \leq x+1 < 1$ であるから, [1] より,

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^1 \left| e' \left\{ (t-x)^2 - 1 \right\} \right| dt \\ &= -\int_0^{x+1} e' \left\{ (t-x)^2 - 1 \right\} dt + \int_{x+1}^1 e' \left\{ (t-x)^2 - 1 \right\} dt \\ &= -\left[e' \left\{ (t-x)^2 - 2(t-x) + 1 \right\} \right]_0^{x+1} + \left[e' \left\{ (t-x)^2 - 2(t-x) + 1 \right\} \right]_{x+1}^1 \\ &= (x+1)^2 + ex^2 \end{aligned}$$

となる。このとき,

$$f'(x) = 2(x+1) + 2ex = 2\{(e+1)x+1\}$$

であり, $2 < e < 3$ より, $-\frac{1}{3} < -\frac{1}{e+1} < -\frac{1}{4}$ であるから, $x = -\frac{1}{e+1}$ のとき, $f'(x) = 0$ を満たす。

[2] $0 \leq x \leq 1$ のとき

$x-1 \leq 0$ かつ $1 \leq x+1$ より, $0 \leq t \leq 1$ のとき, つねに $x-1 \leq t \leq x+1$ であるから,

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^1 \left| e' \left\{ (t-x)^2 - 1 \right\} \right| dt \\ &= -\left[e' \left\{ (t-x)^2 - 2(t-x) + 1 \right\} \right]_0^1 \\ &= -ex^2 + (x+1)^2 \end{aligned}$$

となる。このとき,

$$f'(x) = -2ex + 2(x+1) = 2\{1 - (e-1)x\}$$

であり, $2 < e < 3$ より, $\frac{1}{2} < \frac{1}{e-1} < 1$ であるから, $x = \frac{1}{e-1}$ のとき, $f'(x) = 0$ を満たす。

以上[1], [2]より, $f(x)$ の $-1 \leq x \leq 1$ の範囲における増減表は以下のようになる。

x	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{e+1}$	$\cdots$	$\frac{1}{e-1}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	e	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	$4-e$

$$f\left(-\frac{1}{e+1}\right) = \left(\frac{e}{e+1}\right)^2 + e\left(-\frac{1}{e+1}\right)^2 = \frac{e}{e+1} < 1 < 4-e$$

$$f\left(\frac{1}{e-1}\right) = -e\left(\frac{1}{e-1}\right)^2 + \left(\frac{e}{e-1}\right)^2 = \frac{e}{e-1} < e$$

であることに注意すると, $x = -1$ のとき最大値 e をとり, $x = -\frac{1}{e+1}$ のとき最小値 $\frac{e}{e+1}$ をとる。

$$(\text{答}) \quad \text{最大値: } e \left(x = -1 \right), \text{ 最小値: } \frac{e}{e+1} \left(x = -\frac{1}{e+1} \right)$$