

平成31年度前期日程試験問題

数 学 (Z)

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. この問題冊子は、4ページあります。
3. 問題は **1** ～ **4** の4題です。全問解答しなさい。
4. 試験開始後に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁がないことを確認し、ある場合には手をあげて監督者に知らせなさい。
5. 問題冊子の針金綴じは、はずしてもかまいません。問題冊子の余白は下書き、計算用に使用してもかまいません。
6. 解答用紙(別紙)は4枚(Aい～Aに)です。
7. 各解答用紙の指定欄に、受験番号を記入しなさい。
8. 解答は、必ず解答用紙の指定箇所記入しなさい。
9. 解答用紙は、持ち帰ってはいけません。
10. 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

解答上の注意

11. 解答用紙の **1** ～ **4** で始まる面に、それぞれの問題の論証過程や計算過程がわかるように解答しなさい。

1 t は $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ を満たす実数とする。O を原点とする座標空間に3点 $P(3 \cos t, 3 \sin t, 0)$, $Q(-\sin 2t, -\cos 2t, 1)$, $R(1, -1, 1)$ がある。
平面 $z = \frac{2}{3}$ と直線 PQ の交点を S とする。次の問いに答えよ。

〔1〕 点 S の座標を t の式で表せ。

〔2〕 ベクトル $\overrightarrow{OS}$ の大きさの最大値と最小値を求めよ。また、最大値を与える t の値と最小値を与える t の値を求めよ。

〔3〕 直線 OR が平面 OPQ に垂直であるときの t の値を求めよ。また、このときの四面体 OPQR の体積を求めよ。

- 2 複素数平面において点 $O(0)$ を中心とする半径 $\frac{3}{2}$ の円を C とする。点 z が円 C 上を動くとき、 $w = z + \frac{3}{4z}$ を満たす点 w が描く図形を F とする。次の問いに答えよ。

[1] 図形 F を図示せよ。

[2] 図形 F 上の点 $A(\alpha)$ と 2 点 $P(\sqrt{3})$, $Q(-\sqrt{3})$ が $\angle PAQ = \frac{\pi}{2}$ を満たし、 α の実部と虚部がともに正の数であるとする。

(1) 複素数 α の値を求めよ。

(2) $\alpha = \beta + \frac{3}{4\beta}$ を満たし、円 C 上にはない点 β を求めよ。

3 xy 平面上に曲線

$$C: y = \frac{1}{2}(\log x)^2 \quad (x > 0)$$

がある。ただし、対数は自然対数とし、自然対数の底を e とする。次の問いに答えよ。

〔1〕 曲線 C の凹凸を調べ、変曲点を求めよ。

〔2〕 $t > 0$ とする。曲線 C 上の点 $A\left(t, \frac{1}{2}(\log t)^2\right)$ における接線の方程式および法線の方程式を求めよ。

〔3〕 曲線 C 上の点 $P\left(\sqrt{e}, \frac{1}{8}\right)$ における接線と点 P で接し、かつ x 軸に接するような異なる 2 つの円が存在する。この 2 つの円の中心をそれぞれ Q_1, Q_2 とするとき、線分 Q_1Q_2 の長さを求めよ。

4 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \int_0^1 |e^t(t^2 - 2xt + x^2 - 1)| dt$$

で定める。次の問いに答えよ。ただし、 e は自然対数の底とする。

〔1〕 $f\left(\frac{3}{2}\right)$ の値を求めよ。

〔2〕 $-1 \leq x \leq 1$ における $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ。また、最大値を与える x の値と最小値を与える x の値を求めよ。ただし、 $2 < e < 3$ であることを用いてよい。