

A 1 数 学

この冊子は、数学の問題で 1 ページより 10 ページまであります。

〔注 意〕

- (1) 試験開始の指示があるまで、この冊子を開いてはいけません。
- (2) 試験開始の指示があったら、直ちに解答用マークカードに受験番号および氏名を記入し、さらに受験番号・志望学科をマークしなさい。その後、問題冊子のページ数を確認しなさい。
- (3) 解答は所定の解答用マークカードにマークしたものが採点されます。
- (4) 解答用マークカードについて
 - ① 解答用マークカードは絶対に折り曲げてはいけません。
 - ② マークには黒鉛筆(HBまたはB)を使用しなさい。指定の黒鉛筆以外でマークした場合は採点されません。
 - ③ 誤ってマークした場合は消しゴムでていねいに消し、消し屑を完全に取り除いた上、新たにマークし直しなさい。
 - ④ マークは縦 1 列について 1 箇所に限ります。2 箇所以上マークすると採点されません。あいまいなマークは無効となるので、はっきりマークしなさい。
- (5) 問題冊子は、試験終了後、持ち帰りなさい。

- 1 次の問題文中に、0 から 99 までのいずれかの整数が当てはまる空欄が用意されている。空欄に当てはまる整数を求めて(ア)から(ト)に適する 0 から 9 までの数字を解答用マークカードの指定された欄にマークしなさい。ただし、空欄は整数の桁に応じて 2 種類あり、 $\square$ は 1 桁の数、 $\square\square$ は 2 桁の数を表すものとする。

(40 点)

3 つの放物線

$$y = x^2 + ax + b \quad \cdots \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$y = x^2 + cx + d \quad \cdots \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$y = -x^2 + ex - 3 \quad \cdots \cdots \cdots \textcircled{3}$$

に対して以下のような 3 つの条件を課せば、定数 a, b, c, d, e が決定される。

(条件 1) 放物線①は点 $(2, -5)$ を通るものとする。

そのとき $2a + b = -\square$ (ア) となり、①の頂点の y 座標は

$$-\frac{1}{\square} a^2 - \square a - 9$$

である。従って、この頂点と x 軸との距離は $a = -\square$ (イ) のとき最小となり、その値は $\square$ (ロ) である。

(条件 2) 放物線②は直線 $x = -1$ に関して放物線①と対称とする。

そのとき

$$a + c = \square, \quad -a^2 + \square b = -c^2 + \square d$$

となる。

(条件 3) 放物線③は点 $(-\frac{1}{2}, 1)$ に関して放物線①と対称とする。

そのとき $(-\frac{1}{2}, 1)$ が①、③の頂点を結ぶ線分の中点であることから

$$e = a + \square, \quad a^2 - \square b + \square \square = e^2$$

となる。

よって、上の(条件 1)、(条件 2)、(条件 3)が同時に満たされれば

$$\begin{aligned} a &= -\square\square, & b &= c = \square\square, \\ d &= \square\square, & e &= -\square\square \end{aligned}$$

が得られる。

2 次の(1), (2)の問題文中に, 0 から 99 までのいずれかの整数が当てはまる空欄が用意されている。空欄に当てはまる整数を求めて(ア)から(イ)に適する 0 から 9 までの数字を解答用マークカードの指定された欄にマークしなさい。ただし, 空欄は整数の桁に応じて 2 種類あり, は 1 桁の数, は 2 桁の数を表すものとし, また分数は既約分数を表すものとする。 (30 点)

(1) 点 $P(x, y)$ が次の連立不等式の表す領域

$$\begin{cases} 3x - y \geq -3 \\ x - 2y \leq 4 \\ 2x + y \leq 8 \\ x + 3y \leq 9 \end{cases}$$

を動くとき $x + y$, $x - y$ の最大, 最小について考える。

$x + y$ は $x = \text{ア}$, $y = \text{イ}$ のとき最大となり, その最大値は である。また $x + y$ が最小となるのは $x = -\text{エ}$, $y = -\text{オ}$ のときで, その最小値は $-\text{カ}$ である。

他方, $x - y$ は $x = \text{キ}$, $y = \text{ク}$ のとき最大となり, その最大値は である。また $x - y$ が最小となるのは $x = \text{コ}$, $y = \text{ケ}$ のときで, その最小値は $-\text{シ}$ である。

さらに, 上の領域の面積は $\frac{\text{ス} \text{セ}}{\text{ソ}}$ である。

(2) 点 $P(x, y)$ が 2 つの円

$$(x - 2)^2 + y^2 = 4$$

$$(x - 4 - \sqrt{2})^2 + y^2 = 2$$

の周上および内部を動くものとすれば、 $x + \sqrt{3}y$ は

$$x = \boxed{ア} + \frac{\boxed{イ}}{\boxed{ウ}} \sqrt{2}, \quad y = \frac{1}{2} \sqrt{\boxed{エ}}$$

のとき最大となり、その最大値は $\boxed{オ} + \boxed{カ} \sqrt{\boxed{キ}}$ である。また、 $x - \sqrt{3}y$ は $x = \boxed{ク}$ 、 $y = \sqrt{\boxed{ケ}}$ のとき最小となり、その最小値は $-\boxed{コ}$ である。

2 直線

$$x + \sqrt{3}y = \boxed{オ} + \boxed{カ} \sqrt{\boxed{キ}},$$

$$x - \sqrt{3}y = -\boxed{コ}$$

の交点の x 座標、 y 座標はそれぞれ

$$1 + \frac{3}{2} \sqrt{\boxed{サ}}, \quad \sqrt{\boxed{シ}} + \frac{1}{2} \sqrt{\boxed{ス}}$$

だから、この 2 直線と x 軸とで作る三角形の面積は

$$\frac{1}{2} (\boxed{セ} \sqrt{3} + \boxed{ソ} \sqrt{6})$$

となる。

- 3 次の問題文中に、0 から 99 までのいずれかの整数が当てはまる空欄が用意されている。空欄に当てはまる整数を求めて(ア)から(イ)に適する 0 から 9 までの数字を解答用マークカードの指定された欄にマークしなさい。ただし、空欄は整数の桁に応じて 2 種類あり、 $\square$ は 1 桁の数、 $\square\square$ は 2 桁の数を表すものとし、また分数は既約分数を表すものとする。(15 点)

平面上に原点 O と 3 点 A, B, C を定める。 $\triangle ABC$ においては $AB = 4$, $CA = 3$, $\angle BAC = 90^\circ$ となっているものとする。 $\triangle ABC$ の内心を I とするとき

$$\overrightarrow{OI} = \alpha \overrightarrow{OA} + \beta \overrightarrow{OB} + \gamma \overrightarrow{OC}$$

となる α, β, γ が定まることを以下のようにして示す。

$\angle BAC$ の二等分線が辺 BC と交わる点を P とすると $\frac{BP}{PC} = \frac{\square(\text{ア})}{\square(\text{イ})}$ であ

る。従って、ベクトル間の等式

$$\square(\text{ウ}) \overrightarrow{OP} = \square(\text{エ}) \overrightarrow{OB} + \square(\text{オ}) \overrightarrow{OC} \dots\dots\dots \text{①}$$

が成立する。次に、 $\angle ABC$ の二等分線を引くと、それが線分 PA と交わる点が

内心 I で、 $\triangle ABP$ で上と同様に考えると $\frac{PI}{IA} = \frac{\square(\text{カ})}{\square(\text{キ})}$ となることがわか

る。これから

$$\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OP} + \frac{\square(\text{ク})}{\square(\text{ケ})\square(\text{コ})} \overrightarrow{PA}$$

であり、①により

$$\overrightarrow{OI} = \frac{\square(\text{サ})}{\square(\text{シ})\square(\text{ス})} \overrightarrow{OA} + \frac{1}{\square(\text{セ})} \overrightarrow{OB} + \frac{1}{\square(\text{ソ})} \overrightarrow{OC}$$

が得られる。

- 4 次の問題文中に、0 から 9 までのいずれかの整数が当てはまる空欄が用意されている。空欄に当てはまる整数を求めて(ア)から(イ)に適する 0 から 9 までの数字を解答用マークカードの指定された欄にマークしなさい。(15 点)

整式 $f_n(x)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) を

$$f_0(x) = 1, \quad f_1(x) = x,$$

$$f_n(x) = f_{n-1}(x)f_{n-2}(x) + f_{n-2}(x) \quad (n \geq 2)$$

によって帰納的に定める。まず

$$f_2(x) = \text{[ア]} x + \text{[イ]},$$

$$f_3(x) = \text{[ウ]} x^2 + \text{[エ]} x + \text{[オ]}$$

である。次に、 $f_0(0) = 1$, $f_1(0) = 0$, $f_2(0) = \text{[カ]}$ と $f_n(x)$ の決め方から、

$$f_{2n}(0) = \text{[キ]}, \quad f_{2n+1}(0) = \text{[ク]}$$

となる。

2 つの整式 $f(x)$, $g(x)$ の積の微分法の公式

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

に従って、 $f'_n(x)$ を計算してみるとわかるように

$$f'_{2n}(0) = \text{[ケ]} f'_{2n-1}(0) + \text{[コ]} f'_{2n-2}(0) \quad (n \geq 1)$$

であるが、 $f'_{2n+1}(0) = \text{[サ]} f'_{2n-1}(0) = \text{[シ]}^n$ なので

$$\begin{aligned} f'_{2n}(0) &= \text{[ソ]} f'_{2n-2}(0) + \text{[ズ]}^{n-1} \\ &= \text{[セ]}^n - \text{[ゾ]} \quad (n \geq 1) \end{aligned}$$

が求まる。