

Q 2 数 学

この冊子は、数学の問題で 1 ページより 4 ページまであります。

〔注 意〕

- (1) 試験開始の指示があるまで、この冊子を開いてはいけません。
また、解答用紙は机の上に裏返しにしておきなさい。
- (2) 試験開始の指示があったら、直ちに解答用紙に志望学科・受験番号を記入し、
その後、問題冊子のページ数を確認しなさい。
- (3) 解答は所定の解答用紙に記入したものが採点されます。
- (4) 問題冊子は、試験終了後、持ち帰りなさい。

1

$a, b, c > 0$ として, x, y 平面上の楕円 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ と, 放物線 $C_2: y = c - x^2$ を考える。点 P が 2 曲線 C_1 と C_2 の接点であるとは, C_1, C_2 が共に点 P を通り, P での接線が等しいことを言う。このとき次の問に答えよ。(50 点)

- (1) 点 (x_1, y_1) を C_1 と C_2 の共有点とすると, この点における C_1, C_2 の接線の方程式を書け。
- (2) C_1 と C_2 がちょうど 2 個の接点を持つとする。このときの接点の y 座標を a, b で表せ。
- (3) C_1 と C_2 がちょうど 2 個の接点を持つとき, c の値は a, b の式 $f(a, b)$ で表せる。 $f(a, b)$ を求めよ。
- (4) C_1 と C_2 がちょうど 2 個の接点を持つとき, a, b は必ずある不等式で表される条件をみたしている。この不等式を求めよ。
- (5) a, b が(4)で求めた条件と $a^2 + b^2 = 1$ という条件を共にみたして動くときの $f(a, b)$ の最小値を求めよ。

2 媒介変数 θ によって

$$x = f(\theta) = \sqrt{3}\theta + \sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta\sin\theta,$$

$$y = g(\theta) = 2\cos\theta - \frac{\sqrt{3}\cos^2\theta}{2}$$

と表示される曲線 C は下の図のような形になる(図は C の一部である)。この曲線について次の問に答えよ。(50 点)

- (1) $-\pi \leq \theta \leq \pi$ で、 $g(\theta)$ が負でない値を取るような θ の範囲を求めよ。
- (2) $-\pi \leq \theta \leq \pi$ の範囲で $f(\theta)$ の増減を調べて、解答用紙にある増減表を完成させよ。
- (3) 曲線 C のうちの、(1)で求めた範囲の θ に対応する部分の長さを求めよ。
- (4) α を任意の実数とすると、 $\theta = \pi + \alpha$, $\theta = \pi - \alpha$ に対応する曲線 C の 2 点の位置関係を考察せよ。
- (5) α に関する方程式

$$\frac{\sin\alpha}{\alpha} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cos\alpha + 1} = 0$$

は $\frac{\pi}{6}$ と $\frac{\pi}{2}$ の間に解を持つことを示せ。また、この方程式の解 α に対しては、 $\theta = \pi + \alpha$, $\theta = \pi - \alpha$ に対応する曲線 C の点は一一致することを示せ。

