

- 1 次の(1), (2)において, 内のアからロにあてはまる0から9までの数字を求めて, 解答用マークシートにマークせよ。ただし, は1桁の数, は2桁の数を表す。(30点)

(1) 1個のさいころを続けて投げる。 k 回目に出る目の数を x_k とする。このとき, n 回目までに出了目の数の積 $x_1 x_2 \cdots x_n$ が50となり得るような n の最小値は ア である。そこで, $n \geq$ ア として, n 回目で積 $x_1 x_2 \cdots x_n$ が初めて50となる確率 p_n を求める。積 $x_1 x_2 \cdots x_n$ が初めて50となるのは,

(i) $x_n =$ イ

または

(ii) $x_n =$ ウ

のときのみである。ただし, イ < ウ とする。

(i)の場合, 積 $x_1 x_2 \cdots x_n$ が50となるのは, $n-1$ 回目までに エ が $n-3$ 回, オ が2回出るときである。ゆえに, $x_n =$ イ かつ $x_1 x_2 \cdots x_n = 50$ となる確率は,

$$\frac{(n - \text{カ})(n - \text{キ})}{\text{ク} \times \text{ケ}^n}$$

である。

(ii)の場合, 積 $x_1 x_2 \cdots x_n$ が50となるのは, $n-1$ 回目までに コ が $n-3$ 回, サ が1回, シ が1回出るときである。ゆえに, $x_n =$ ウ かつ $x_1 x_2 \cdots x_n = 50$ となる確率は,

$$\frac{(n - \text{ス})(n - \text{セ})}{\text{ソ}^n}$$

である。よって, n 回目で積 $x_1 x_2 \cdots x_n$ が初めて50となる確率 p_n は,

$$p_n = \text{タ} \frac{(n - \text{チ})(n - \text{ツ})}{\text{テ} \times \text{ト}^n}$$

で与えられる。また, $p_n > \frac{1}{150}$ となるのは, $n =$ ナ または $n =$ ニ のときである。

(2) 4点 $O(0, 0, 0)$, $A(1, 2, 0)$, $B(2, 0, -1)$, $C(0, -2, 4)$ を頂点とする四面体 $OABC$ について考える。

(a) 点 $D(3, -2, 7)$ に対し、直線 OD と $\triangle ABC$ の交点 P の座標は

$$\left(\frac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}, -\frac{\boxed{\text{ノ}}}{\boxed{\text{ハ}}}, \frac{\boxed{\text{ヒ}}}{\boxed{\text{フ}}} \right) \text{である。}$$

(b) 頂点 O から $\triangle ABC$ に下ろした垂線の足 H の座標は

$$\left(\frac{\boxed{\text{ヘ}}}{\boxed{\text{ホ}}}, \frac{\boxed{\text{マ}}}{\boxed{\text{ミ}}}, \frac{\boxed{\text{ム}}}{\boxed{\text{メ}}} \right) \text{であり、このときの } \overrightarrow{OH} \text{ の長さは、}$$

$$\frac{\boxed{\text{モ}}}{\boxed{\text{ヤ}}} \sqrt{\boxed{\text{ユ}} \boxed{\text{ヨ}}} \text{である。}$$

さらに、 $\triangle ABC$ の面積は、 $\frac{\boxed{\text{ラ}}}{\boxed{\text{リ}}} \sqrt{\boxed{\text{ル}} \boxed{\text{レ}}}$ であり、四面体 $OABC$ の体

積は、 $\boxed{\text{ロ}}$ である。

問題 **2** , **3** の解答は解答用紙に記入せよ。

2

- (1) p, q, r を定数とし, $p \neq 1$ と仮定する。数列 $\{y_n\}$ が関係式

$$\begin{cases} y_1 = r \\ y_{n+1} = py_n + q(1-p)n + q \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

をみたすとき, y_n を求めよ。

- (2) $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とし, 行列 $X_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) が
関係式

$$\begin{cases} X_1 = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \\ X_{n+1} = AX_n + 3E \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

をみたすとする。ここで, E は単位行列を表す。

- (a) X_n を求めよ。

- (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - b_n}{c_n - d_n}$ を求めよ。

(35 点)

3 a を正の実数とし、関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2a}x\right) & (|x| \leq a \text{ のとき}) \\ |x| - a & (|x| > a \text{ のとき}) \end{cases}$$

により定める。

- (1) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x = \pm 1$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 $V(a)$ を求めよ。
- (2) a がすべての正の実数をうごくときの $V(a)$ の最小値、および最小値を与える a の値を求めよ。

(35 点)