

次の 1 から 4 までの文章の 内のカタカナに当てはまる 0～9 までの数字をもとめ、その数を解答用マークシートにマークしなさい。ただし、分数は既約分数として表すものとする。また、空欄は整数の桁に応じて 4 種類あり、
 は 1 桁の数、 は 2 桁の数、 は 3 桁の数、
 . は 1 桁の数と小数点以下第 4 位の数を表すものとする。

- 1 (1) 半径 1 cm の円に内接する正 n 角形の 1 辺の長さは

$$\text{ア} \sin \frac{\text{イ} \text{ウ} \text{エ}^\circ}{n} \text{ cm}$$

になり、その面積は

$$\text{オ} \frac{n}{n} \sin \frac{\text{カ} \text{キ} \text{ク}^\circ}{n} \text{ cm}^2$$

である。また、半径 1 cm の円に外接する正 n 角形の 1 辺の長さは

$$\text{ケ} \tan \frac{\text{コ} \text{サ} \text{シ}^\circ}{n} \text{ cm}$$

であり、その面積は $n \tan \frac{\text{ス} \text{セ} \text{ソ}^\circ}{n} \text{ cm}^2$ になる。

- (2) 1 辺 $\sqrt{3}$ cm の正 6 角形のタイル 8 枚を重ねないように縦 $5\sqrt{3}$ cm、横 9 cm の長方形内に並べる。さらに、この長方形内に隙間なくタイルを敷き詰めるため、同じ形のタイルを切断して埋め込む。切断されて埋め込まれたタイルの総面積は タ $\sqrt{\text{チ}}$ cm^2 で、このとき切断して使用したタイルの枚数は最小 ツ 枚である。

(30 点)

2 3点A(0, 4), B(2, 0), C(-1, 3)を通る円の方程式は $x^2 + y^2 -$

$\boxed{\text{ア}}$ $x - \boxed{\text{イ}}$ $y = 0$ であり, この円の中心の座標は $(\boxed{\text{ウ}}, \boxed{\text{エ}})$ である。

次に△ABCの内接円の中心Iの座標を (a, b) とすれば, 点Iから直線AB, 直線BC, 直線CAに至る距離は等しい。これを a, b の連立方程式として表し, Iが△ABCの内部にあることに注意して解けば

$$a = \boxed{\text{オ}} - \sqrt{\boxed{\text{カ}} \boxed{\text{キ}}}, b = \boxed{\text{ク}}$$

となる。このとき, 内接円の半径は $\boxed{\text{ケ}} \sqrt{\boxed{\text{コ}}} - \sqrt{\boxed{\text{サ}}}$ である。

一方, △ABCの重心の座標は $\left(\frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}, \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}} \right)$ になる。

(20点)

3 放物線 $y = \frac{1}{4p} x^2 (p > 0)$ 上において、 x 座標が正である点 $P\left(t, \frac{t^2}{4p}\right)$

を考える。このとき点 P における接線の傾きは $\frac{t}{\boxed{\text{ア}}p}$ であるから、この点を通

りこの接線に垂直な直線 l の傾きは $-\frac{\boxed{\text{イ}}p}{t}$ である。直線 l と直線 $x = t$ との
なす角を $\theta_1 (0^\circ < \theta_1 < 90^\circ)$ とすれば、この直線 l と x 軸とのなす角は

$\boxed{\text{ウ}} \boxed{\text{エ}}^\circ - \theta_1$ となり、それゆえ $\tan \theta_1 = \frac{t}{\boxed{\text{オ}}p}$ を得る。一方、2 点 P ,

$F(0, p)$ を通る直線と x 軸とのなす角を $\theta (0^\circ < \theta < 180^\circ)$ とする。ただし θ は

$\tan \theta$ が、直線 PF の傾きを与えるように選ぶ。このとき $\tan \theta$
 $= \frac{t^2 - \boxed{\text{カ}}p^2}{\boxed{\text{キ}}tp}$ になる。また、この直線 PF と先ほどの直線 l とのなす角を

$\theta_2 (0^\circ < \theta_2 < 90^\circ)$ とすれば、

$$\tan \theta_2 = \frac{\tan(\boxed{\text{ク}} \boxed{\text{ケ}}^\circ - \theta_1) + \tan \theta}{1 - \tan(\boxed{\text{コ}} \boxed{\text{サ}}^\circ - \theta_1) \tan \theta}$$

となり、これを t と p で表せば、 $\tan \theta_2 = \frac{t}{\boxed{\text{シ}}p}$ となる。したがって、直線 l

は直線 $x = t$ と直線 PF とのなす角を $\boxed{\text{ス}}$ 等分する。ここでこの放物線の内側
を鏡として使用すれば、 F から発する光はすべて y 軸に平行な直線上をたどる
ことになる。

(20 点)

- 4 N を自然数とすると、 N 以下の自然数 n で 2^n の値を 10 進数として表示したときの最高位の数字(左端の数字)が 1 となっているものを取り出すとき、これらの個数を $f(N)$ で表す。たとえば、 $N = 4$ ならば、 $n = 1, 2, 3, 4$ で $2^1 = 2, 2^2 = 4, 2^3 = 8, 2^4 = 16$ であるから、そのうち最高位の数字が 1 であるのは $n = 4$ のときだけで $f(4) = 1$ となる。さらに $N = 8, 10, 12, 15$ について考えると、次表を得る。

N	4	8	10	12	15
$f(N)$	1	ア	イ	ウ	エ

ところで $n \geq 4$ に対して、 k 桁の数 2^n が 1 を最高位の数字にもつための必要十分条件は

$$10^{k-1} \leq 2^n < \text{オ} \cdot 10^{k-1}$$

である。この関係は

$$\frac{k-1}{\log_{10} 2} \leq n < \frac{k-1}{\log_{10} 2} + \text{カ}$$

と変形され、この不等式をみたす整数 n はただ 1 つしか存在しない。

いま、 k_0 を不等式 $\frac{k_0-1}{\log_{10} 2} \leq N$ をみたす最大の整数とすると、 N が不等式 $\frac{k_0-1}{\log_{10} 2} \leq N < \frac{k_0-1}{\log_{10} 2} + \text{キ}$ をみたしていれば $f(N) = k_0 - \text{ク}$, $f(N-1) = k_0 - \text{ケ}$ となり、みたしていなければ $f(N) = f(N-1) = k_0 - \text{コ}$ となる。この考えをもとに $N = 2001$ のとき、 $f(N) = \text{サ シ ス}$ を得る。このとき $\frac{f(2001)}{2001}$ を小数点以下第 4 位まで表すと セ .

ソ タ チ ツ になり、また $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{f(N)}{N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{k_0}{N} = \log_{10} \text{テ}$ が成り立つ。ここに $\log_{10} 2 = 0.3010$ とする。

(30 点)