

1 次の (1), (2), (3) において, 内の 1 つのカタカナに 0 から 9 までの数字が 1 つあてはまる。その数字を解答用マークシートにマークしなさい。与えられた枠数より少ない桁の数があてはまる場合は, 上位の桁を 0 として, 右に詰めた数値としなさい。(50 点)

(1) 4 次多項式 $f(x)$ は, $f(x)+2$ が $(x-1)^2$ で割り切れ, $f(x)-6$ が $(x+1)^2$ で割り切れるものとする。

(a) $f(1)=-$, $f(-1)=$ が成り立つ。

(b) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ について, $f'(1)=$, $f'(-1)=$ が成り立つ。

(c) さらに, $f(x)$ が

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^4 - 4} = 3$$

を満たすとき,

$$f(x) = \text{ } x^4 + \text{ } x^3 - \text{ } x^2 - \text{ } x + \text{ }$$

となる。

(2) 集合 X を $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ とし, A, B をそれぞれ X の部分集合(空集合でもよい)で, $A \cup B = X$ を満たすものとする。

(a) A, B に共通の要素がないとき, A, B の選び方は全部で

ア	イ
---	---

 通りある。

(b) A, B に共通の要素があってもよい場合を考える。 A の要素の個数が 1 であるとき, A, B の選び方は全部で

ウ	エ
---	---

 通りある。また, A の要素の個数が 2 であるとき, A, B の選び方は全部で

オ	カ
---	---

 通りある。さらに, A の要素の個数に制限がないとき, A, B の選び方は全部で

キ	ク	ケ
---	---	---

 通りある。

- (3) 複素数 α, β は、式 $|\alpha|=2, |\beta|=6, 3\alpha+\beta=6$ を満たし、かつ α の虚部が正であるとき、

$$\alpha = \boxed{\text{ア}} + \sqrt{\boxed{\text{イ}}} i, \beta = \boxed{\text{ウ}} - \boxed{\text{エ}} \sqrt{\boxed{\text{オ}}} i$$

である。ただし、 $i = \sqrt{-1}$ である。

$|z+1|=2\sqrt{3}$ を満たす複素数 z に対して、 $|z-\alpha|+|z-\beta|$ は

$z = \boxed{\text{カ}} - \sqrt{\boxed{\text{キ}}} i$ のとき、最小値 $\boxed{\text{ク}} \sqrt{\boxed{\text{ケ}} \boxed{\text{コ}}}$ をとる。

問題 **2** , **3** の解答は解答用紙に記入しなさい。

2 次の問いに答えなさい。

(25 点)

(1) $t = \tan x$ と置換して、次の定積分の値を求めなさい。

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{\tan x}}{\cos^4 x} dx$$

(2) $0 < x < 1$ で定義された次の関数 $f(x)$ の導関数を求めなさい。

$$f(x) = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}}$$

(3) x, y, z を未知数とする連立 1 次方程式

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$$

が解をもつように a の値を定めなさい。

- (1) どんな正の数 a, b に対しても, 不等式

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq P$$

が成り立つとき, P のとりうる最大値を求めなさい。

- (2) 数列 $\{a_n\}$ に対し,

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

とおく。このとき, どんな正の数からなる数列 $\{a_n\}$ に対しても, 不等式

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \geq \frac{Q}{S_n}$$

が成り立つような Q を考える。

- (a) $n = 2$ のとき, Q のとりうる最大値を求めなさい。
(b) $n = 3$ のとき, Q のとりうる最大値を求めなさい。
(c) 一般の n について, Q のとりうる最大値を n で表しなさい。