

問題 **1** の解答は解答用マークシートにマークしなさい。

1 次の文章中の **ア** から **モ** までに当てはまる数字 0～9 を求めて、解答用マークシートの指定された欄にマークしなさい。ただし、分数は既約分数として表しなさい。(40 点)

(1) O を原点とする座標平面において 2 点 $A(4, -9)$, $B(-3, 12)$ をとる。 $0 < t < 1$ を満たす実数 t に対して、線分 AB を $t : 1 - t$ に内分する点を P とし、線分 AB を $1 - t : t$ に内分する点を Q とする。点 P の座標は $(-\text{ア } t + \text{イ}, \text{ウ } t - \text{オ})$ である。ベクトル $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OQ}$ が垂直になるのは、 $t = \frac{\text{カ}}{\text{キ}}$ または $t = \frac{\text{ク}}{\text{ケ}}$ のときである。このとき P の座標は、 $(\text{コ}, \text{サ})$ または $(\text{シ}, \text{ス})$ である。

(2) 3 辺の長さが $AB = 5$, $BC = 7$, $AC = 4$ である $\triangle ABC$ の外接円の半径を R とする。このとき、 $\cos A = -\frac{1}{\text{セ}}$ であるから $\sin A = \frac{\text{ソ}}{\text{タ}} \sqrt{\text{チ}}$ であり、 $R = \frac{\text{ツ } \text{テ}}{\text{ト } \text{ナ}} \sqrt{\text{ニ}}$ となる。

(3) 赤玉 6 個と白玉 3 個が入っている袋がある。この袋の中から 1 回 1 個ずつ玉を取り出す操作を 5 回行うことにする。

(a) 取り出した玉を 1 回ごとに袋に戻すことにしてこの操作を行う場合、赤玉

がちょうど 3 回出る確率は $\frac{\boxed{\text{ヌ}} \quad \boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}} \quad \boxed{\text{ハ}} \quad \boxed{\text{ヒ}}}$ である。

(b) 取り出した玉を袋に戻さないことにしてこの操作を行う場合、赤玉がちょ

うど 3 回出る確率は $\frac{\boxed{\text{フ}} \quad \boxed{\text{ヘ}}}{\boxed{\text{ホ}} \quad \boxed{\text{マ}}}$ である。

(c) 1 回目に取り出した玉は袋に戻し、2 回目以降は取り出した玉を袋に戻さないことにしてこの操作を行う場合、赤玉がちょうど 3 回出る確率は

$\frac{\boxed{\text{ミ}} \quad \boxed{\text{ム}}}{\boxed{\text{メ}} \quad \boxed{\text{モ}}}$ である。

問題 **2** , **3** の解答は解答用紙に記入しなさい。

2 関数 $f(x)$, $g(x)$ を

$$f(x) = \frac{8}{1-x} \text{ (ただし } x < 1), \quad g(x) = \frac{1}{x-1} \text{ (ただし } x > 1)$$

とする。曲線 $y = f(x)$ 上の点 $P(a, f(a))$ から曲線 $y = g(x)$ に引いた接線 ℓ の接点を $Q(b, g(b))$ とし、 ℓ と x 軸との交点を $R(c, 0)$ とする。

(1) c の値を b を用いて表せ。

(2) b の値を a を用いて表せ。

$t < a$ を満たす実数 t に対して、直線 $x = t$, $x = a$, x 軸, および曲線 $y = f(x)$ とで囲まれた図形を x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を $V(t)$ とする。点 P , R , および点 $(a, 0)$ を頂点とする直角三角形を x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を W とする。このとき

(3) $\lim_{t \rightarrow -\infty} V(t)$ の値を a を用いて表せ。

(4) W の $\lim_{t \rightarrow -\infty} V(t)$ に対する比の値が a によらない一定値であることを示せ。

(30 点)

3 a, b は正の実数であって、関数 $f(x) = a(e^{bx} + e^{-bx})$ は、すべての実数 x に対して $1 + \{f'(x)\}^2 = \{f(x)\}^2$ を満たしているという。このとき曲線 $y = f(x)$ 上の点 $P_0(0, f(0))$ と点 $P_1(1, f(1))$ をとり、点 P_0 から点 P_1 までのこの曲線の弧 P_0P_1 の長さを L とする。

(1) a, b の値を求めよ ($a > 0, b > 0$ に注意すること)。

(2) L を求めよ。

(3) 弧 P_0P_1 の中点(この曲線上の点で P_0 および P_1 からの弧の長さが $\frac{L}{2}$ である点)を M とする。 M から x 軸に下ろした垂線と x 軸との交点を N とする。

(i) 線分 MN はこの曲線と直線 $x = 0, x = 1, x$ 軸とで囲まれた図形の面積を 2 等分することを示せ。

(ii) 線分 MN の長さと L の大小を比較せよ。

必要ならば、 $\frac{22}{3} < e^2 + \frac{1}{e^2} < \frac{23}{3}$ であることを用いてもよい。

(30 点)