

問題 1 の解答は解答用マークシートにマークしなさい。

1 次の文章中の ア から ハ までに当てはまる数字 0～9 を求めて、解答用マークシートの指定された欄にマークしなさい。ただし、分数は既約分数として表しなさい。(40 点、ただし数学科は 60 点)

(1)  $x$  についての 2 次方程式  $x^2 + kx + (3k-1)^2 = 0$  が実数解をもつのは、

実数  $k$  が  $\frac{\text{ア}}{\text{イ}} \leq k \leq \frac{\text{ウ}}{\text{エ}}$  を満たすときである。とくに、 $x = 0$  がこの

方程式の解になるのは、 $k = \frac{\text{オ}}{\text{カ}}$  のときで、このときもう一つの解は  $x =$

$-\frac{\text{キ}}{\text{ク}}$  である。

(2) 空間内に 2 点  $A(1, 2, 3)$ ,  $B(3, 1, 2)$  をとり、 $AB$  を一辺とする正四面体  $ABCD$  を考えると、 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \text{ケ}$  である。

辺  $AB$  の中点を  $P$  とするとき、 $|\overrightarrow{PC}|^2 = |\overrightarrow{PD}|^2 = \frac{\text{コ}}{\text{サ}}$  で、 $\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PD} =$

$\frac{\text{シ}}{\text{ス}}$  であるから、 $\angle CPD = \theta$  とおくと、 $\cos \theta = \frac{\text{セ}}{\text{ソ}}$  である。

- (3)  $1 \pm \sqrt{3}i = \boxed{\text{タ}} (\cos \boxed{\text{チ}} \boxed{\text{ツ}}^\circ \pm i \sin \boxed{\text{チ}} \boxed{\text{ツ}}^\circ)$  (複号同順)であるから、 $(1 + \sqrt{3}i)^n + (1 - \sqrt{3}i)^n = 128$ を満たす自然数  $n$  は、 $n = \boxed{\text{テ}}$  と  $n = \boxed{\text{ト}}$  である。

- (4) 1の目の面は赤色に、3と5の目の面は黄色に、2と4と6の目の面は青色にぬりつぶしたサイコロをふる。黄色、青色の面が出る確率は、それぞれ  $\frac{1}{\boxed{\text{ナ}}}$ ,  $\frac{1}{\boxed{\text{ニ}}}$  である。このサイコロを3つの色が出る(つまりどの色の面も少なくとも1回出る)までふりつづけることにすると、3回で終る確率は  $\frac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}$ , ちょうど4回で終る確率は  $\frac{\boxed{\text{ノ}}}{\boxed{\text{ハ}}}$  となる。

問題 2 , 3 の解答は解答用紙に記入しなさい。

2 関数  $y = \log \sqrt{x}$  ( $x > 0$ ) のグラフ上の点  $P(t, \log \sqrt{t})$  と原点  $O(0, 0)$  を通る直線の傾きを  $g(t)$  とする。ただし、対数は自然対数である。

- (1)  $g(t)$  を求めよ。
- (2)  $g(t)$  の増減を調べ、最大値を求めよ。
- (3) 曲線  $y = \log \sqrt{x}$  に原点  $O$  から引いた接線を  $\ell$  とする。 $\ell$  の方程式を求めよ。
- (4) (3)における直線  $\ell$  と曲線  $y = \log \sqrt{x}$  , および  $x$  軸とで囲まれた図形の面積を求めよ。

(30 点, ただし数学科は 45 点)

**3** 連続関数  $f(x)$  に関する次の条件 (\*) について考える。

条件 (\*): すべての自然数  $n$  に対して

$$\int_{-1}^1 x^{2^n} f(x) dx < \int_{-1}^1 f(x) dx$$

が成立する。

(1) 関数  $f(x) = x^2 + k(1 - 9x^2)$  が条件 (\*) を満たすような実数  $k$  の範囲を求めよ。

(2) 連続関数  $g(x)$  が性質  $P$  をもつとは次のことが成り立つこととする。

(性質  $P$ ) どんな正の実数  $a$  に対しても、関数  $f(x) = g(ax) + b(1 - 9x^2)$  が条件 (\*) を満たすような正の実数  $b$  が ( $a$  に応じて) とれる。

(i)  $g(x) = x^2$  は性質  $P$  をもつことを示せ。

(ii)  $g_1(x)$  と  $g_2(x)$  がともに性質  $P$  をもつならば、 $g_1(x) + g_2(x)$  も性質  $P$  をもつことを示せ。

(30 点, ただし数学科は 45 点)