

- 1 次の  にあてはまる正の整数を求めよ。そして、 内のカタカナにあてはまる0から9までの数字をそれぞれ解答用マークシートにマークせよ。ただし、分数は既約分数として表すことにする。 (30点)

放物線  $y = x^2$  の上の点Pにおける接線を  $l$ 、点Pを通り  $l$  に直交する直線を  $m$  とし、 $l$ 、 $m$  が直線  $y = -1$  と交わる点をそれぞれQ、Rとする。Pが放物線上の原点以外の点を動くとき、三角形PQRの面積がいつ最小になるかを考える。

$P(a, a^2)$  とするとき、 $l$  の方程式は  $y = \text{ア} ax - \text{イ} a^2$ 、 $m$  の方程式は

$$y = -\frac{\text{ウ}}{\text{エ} a} x + \frac{\text{オ}}{\text{カ}} + a^2 \text{ である。}$$

放物線  $y = x^2$  は、 $y$  軸に関して対称であるから、 $a > 0$  の場合のみを考えればよい。(以下  $a > 0$  とする。)

三角形の面積を  $f(a)$  とすると、

$$f(a) = \frac{\text{キ}}{\text{ク} a} + \frac{\text{ケ}}{\text{コ}} a + \frac{\text{サ}}{\text{シ}} a^3 + \text{ス} a^5$$

となる。このことから三角形PQRの面積が最小になるときの点Pの  $y$  座標は

$$\frac{\sqrt{\text{セ} \text{ソ} \text{タ} - \text{チ}}}{\text{ツ} \text{テ}}$$

であることがわかる。

問題 **2** の解答は解答用紙に記入せよ。

**2** A君が0から4までの整数からなる4つの数  $a, b, c, d$  を持っている。これをB君に暗号化して送り、B君が解読する。そのために、0以上の整数を成分と

してもつ行列  $\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$  と  $\begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix}$  を使って次のような方法をとる。A君は

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$  を計算した結果をB君に送り、B君はA君から受けとった

行列に右から  $\begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix}$  をかけ、 $\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$  を得る。さらに  $\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$  の各成

分を5で割った余りを成分とする行列  $\begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix}$  を得る。

(1)  $\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$  のとき、 $\begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix}$  を

$a, b, c, d$  で表せ。

(2)  $\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$  のとき、どのような  $a, b, c, d$  に対しても、

$\begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  となるような  $\begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix}$  を  $0 \leq i, j, k, l \leq 4$  の範

囲で求めよ。

(40点)

問題 **3** の解答は解答用紙に記入せよ。

- 3** (1) 背理法とは何かを 20 字以上 100 字以内で説明せよ。  
(2)  $\sqrt[3]{2}$  が無理数であることを背理法を用いて証明せよ。

(30 点)