

問題 1 の解答は解答用マークシートにマークしなさい。

1 次の文章中の ア から マ までに当てはまる数字0～9を求めて、解答用マークシートの指定された欄にマークしなさい。ただし、分数は既約分数として表しなさい。
(40点、ただし数学科は60点)

(1) 行列 A, P を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & k \\ j & 2 \end{pmatrix}$$

とおく。行列 P が逆行列をもつとき、 $jk \neq$ ア であり、さらに等式

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

が成り立つとすると、

$$j = - \text{ イ }, k = \text{ ウ }, \alpha = - \text{ エ }, \beta = \text{ オ }$$

または

$$j = \frac{\text{ カ }}{\text{ キ }}, k = - \frac{\text{ ク }}{\text{ ケ }}, \alpha = \text{ コ }, \beta = - \text{ サ }$$

となる。

(2) 整式 x^5 を $x-2$ で割った余りは

シ	ス
---	---

 となる。

n^5 を $n-2$ で割った余りが 4 になるような自然数 n は小さい順に

セ

 ,

ソ	タ
---	---

 ,

チ	ツ
---	---

 である。

(3) k を正の定数とする。中心が $Q(0, k)$ で半径が $\frac{\sqrt{10}}{3}$ の円が曲線 $y = x^3$ と原

点以外の点 $P(a, b)$ で接している。このとき \vec{QP} とベクトル $(1, \text{テ} a \text{ト})$

が直交することより

$$b - k = - \frac{\text{ナ}}{\text{ニ}} a$$

となる。

a と k の値を求めると

$$a = \text{ヌ} , k = \frac{\text{ネ}}{\text{ノ}}$$

または

$$a = \frac{\text{ハ}}{\text{ヒ}} , k = \frac{\text{フヘ}}{\text{ホマ}}$$

となる。

問題 2 , 3 の解答は解答用紙に記入しなさい。

2 実数全体で定義された関数 $f(x)$ は常に正の値をとり、すべての実数 x, y に対し

$$3f(x+y) = f(x)f(y)$$

を満たすとする。また $f(1) = 6$ であるとする。

(1) $f(0)$ の値を求めよ。

(2) 自然数 n に対して $f\left(\frac{1}{n}\right)$ の値を n を用いて表せ。

(3) 自然数 n に対して

$$a_n = n \left(f\left(1 + \frac{1}{n}\right) - f(1) \right)$$

とおく。 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ の値を求めよ。

(4) 自然数 n に対して

$$b_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

とおく。 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ の値を求めよ。

(30 点, ただし数学科は 45 点)

3 原点 O を中心とし半径 2 の円を D_1 とする。半径 1 の円 D_2 は、最初に中心 Q が $(3, 0)$ にあり、円 D_1 に外接しながら滑ることなく反時計回りに転がるものとする。点 P は円 D_2 の周上に固定されていて、最初は $(2, 0)$ にある。点 P がもとの点 $(2, 0)$ に戻るまでに描く曲線を C とする。

(1) 2つの円の接点を R としたとき、線分 OR が x 軸となす角を θ とする。点 P の座標を θ を用いて表せ。

(2) 点 P の x 座標の最大値、および y 座標の最大値を求めよ。

(3) 曲線 C の長さを求めよ。

(30 点、ただし数学科は 45 点)

