

問題 1 の解答は解答用マークシートにマークしなさい。

1 次の文章中の ア から ラ までに当てはまる数字 0 ~ 9 を求めて、解答用マークシートの指定された欄にマークしなさい。ただし、分数は既約分数として表しなさい。 (40 点)

(1) 正の実数 x に対して、 $20 \leq \log_{10} x < 21$ のとき、 x の整数部分は ア イ 桁の数である。また $\log_{10} 3$ の値として 0.4771 を使うと、 $2.7 = 3^{\text{ウ}} \times 10^{-\text{エ}}$ より、 $\log_{10} 2.7$ の値は 0. オ カ キ ク となる。整数 n に対して 2.7^n の整数部分が 10 桁の数となるのは ケ コ $\leq n \leq$ サ シ のときである。

* 次のページはメモ欄です。正式な解答は解答用マークシートにマークしなさい。

(2) 定積分

$$I = \int_1^4 t^2 \sin\left(\frac{\pi}{4}t\sqrt{t}\right) dt$$

の値を求めたい。 $t\sqrt{t} = x$ とおくと $\frac{dx}{dt} = \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}\sqrt{t}$ であり、

$$I = \frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}} \int_{\boxed{\text{ツ}}}^{\boxed{\text{チ}}} x \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) dx$$

となる。また不定積分 $\int x \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) dx$ は C を積分定数として

$$-\frac{\boxed{\text{テ}}}{\pi} x \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) + \frac{\boxed{\text{ト}}}{\pi^2} \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) + C$$

となるので、 I の値は

$$I = \frac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}} \left(\frac{\sqrt{2} - \boxed{\text{ネ}}}{\pi} - \frac{\boxed{\text{ハ}}}{\pi^2} \sqrt{2} \right)$$

と求められる。

* 次のページはメモ欄です。正式な解答は解答用マークシートにマークしなさい。

- (3) 原点を O とする座標平面において 2 つの放物線 $C_1 : y = 2x^2$ と $C_2 : y = 7x^2$ を考える。 $t > 0$ に対して C_1 上の点 $P(t, 2t^2)$ をとる。原点と異なる C_2 上の点 Q を、2 直線 OP, OQ が垂直になるようにとると、点 Q の座標は

$$\left(-\frac{1}{\boxed{\text{ヒ}} \boxed{\text{フ}} t}, \frac{1}{\boxed{\text{ヘ}} \boxed{\text{ホ}} t^2} \right)$$

である。さらに、線分 QP を $2:7$ に内分する点を R とする。 t が正の実数を動くとき、点 R の軌跡は放物線

$$y = \boxed{\text{マ}} x^2 + \frac{\boxed{\text{ミ}}}{\boxed{\text{ム}}}$$

となる。 R の y 座標は $t = \frac{\boxed{\text{メ}}}{\boxed{\text{モ}}}$ のとき最小になり、このとき直線 PQ の方程式は

$$y = \frac{\boxed{\text{ヤ}}}{\boxed{\text{ユ}}} x + \frac{\boxed{\text{ヨ}}}{\boxed{\text{ラ}}}$$

となる。

* 次のページはメモ欄です。正式な解答は解答用マークシートにマークしなさい。

問題 2, 3 の解答は解答用紙に記入しなさい。

2 複素数平面上に点 P がある。 P が複素数 z にあるとき、サイコロを 1 回投げて出た目の数が m ($m = 1, 2, \dots, 6$) ならば、 P を z^m に移す。サイコロを 1 回投げごとに P を上の操作で移していく。最初 P は i にあるとして、サイコロを n 回投げた後に P が $1, i, -1, -i$ にある確率をそれぞれ p_n, q_n, r_n, s_n とする。

- (1) p_1, q_1, r_1, s_1 を求めよ。
- (2) q_{n+1}, s_{n+1} を q_n と s_n を用いて表せ。
- (3) $q_n + s_n$ と $q_n - s_n$ を求めて、 q_n, s_n を決定せよ。
- (4) r_n を求め、次に p_n を求めよ。また、 $n \rightarrow \infty$ のときの p_n, q_n, r_n, s_n それぞれの極限を求めよ。

(30 点)

* 次のページはメモ欄です。正式な解答は解答用紙に記入しなさい。

3

定数 a, b に対して $f(t) = ae^{at}$, $g(t) = be^{bt}$ とし

$$S = \int_0^1 (f(t) + g(t)) dt, \quad T = \int_0^1 (f(t) - g(t)) dt$$

とおく。

(1) S, T を a と b を用いて表せ。

(2) a, b が $S^2 + T^2 = 8$ を満たしながら動くとき

$$x = e^a - 1, \quad y = e^b - 1$$

で定まる xy 平面上の点 $P(x, y)$ の軌跡を求めよ。

(3) a, b が $S^2 + T^2 = 8$ を満たしながら動くとき, $S^2 - T^2$ のとる値の範囲を求めよ。

(30 点)

* 次のページはメモ欄です。正式な解答は解答用紙に記入しなさい。