

問題 1 の解答は解答用マークシートにマークしなさい。

1 次の文章中の ア から マ までに当てはまる数字 0 ~ 9 を求めて、解答用マークシートの指定された欄にマークしなさい。ただし、分数は既約分数として表しなさい。(40 点)

(1) 2つの曲線 $C_1 : y = \sin x$, $C_2 : y = \cos x$ ($0 \leq x \leq 2\pi$) を考える。 C_1 と C_2 の交点の x 座標は $\frac{\pi}{\text{ア}}$ と $\frac{\text{イ}}{\text{ウ}}\pi$ であり、 C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積は $\text{エ}\sqrt{\text{オ}}$ である。またこの図形の $y \geq 0$ にある部分を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積は $\frac{\pi}{\text{カ}}(\pi + \text{キ})$ となる。

* 次のページはメモ欄です。正式な解答は解答用マークシートにマークしなさい。

(2) 自然数 a, b に対し, $a \diamond b$ は a と b の公約数の個数を表すものとする。例えば, 6 と 10 の公約数は 1 と 2 の 2 つだから $6 \diamond 10 = 2$ となる。また $8 \diamond 12 = \boxed{\text{ク}}$ となる。

以下 c は 100 以下の自然数とする。

$c \diamond 15 = 2$ となる c の個数は

ケ	コ
---	---

 である。

$c \diamond 20 = 3$ となる c の個数は

サ	シ
---	---

 であり,

$c \diamond 20 = 4$ となる c の個数は

ス

 である。

* 次のページはメモ欄です。正式な解答は解答用マークシートにマークしなさい。

- (3) 複素数平面上に 2 点 $P_1(z_1), P_2(z_2)$ がある。原点 O と P_1, P_2 の 3 点は同一直線上にないものとする。線分 OP_1 を $3:1$ に内分する点を $Q_1(w_1)$, 線分 OP_2 を $3:2$ に内分する点を $Q_2(w_2)$, さらに P_1Q_2 と P_2Q_1 との交点を $H(z)$ とする。 H が P_1Q_2 を $t:1-t$ に, P_2Q_1 を $s:1-s$ に内分するとして z を z_1, z_2 を用いて表すと

$$z = (1-t)z_1 + \frac{\text{セ}}{\text{ソ}}tz_2 = \frac{\text{タ}}{\text{チ}}sz_1 + (1-s)z_2$$

となる。このとき $t = \frac{\text{ツ}}{\text{テ} + \text{ト}}$ となるので

$$z = \frac{\text{ナ}}{\text{ニ} + \text{ヌ}} \left(\text{ネ} z_1 + z_2 \right)$$

と表される。いま $z_1 = 3i$ として, $P_2(z_2)$ が中心 $C(3+5i)$, 半径 2 の円周上を動くとき, 点 $H(z)$ は

$$\text{中心 } \frac{\text{ノ}}{\text{ハ} + \text{ヒ}} + \text{フ}i, \quad \text{半径 } \frac{\text{ヘ}}{\text{ホ} + \text{マ}}$$

の円周上を動く。

* 次のページはメモ欄です。正式な解答は解答用マークシートにマークしなさい。

問題 2, 3 の解答は解答用紙に記入しなさい。

2 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = e^{-3x} \sin 4x$$

と定める。また c を定数として $g(x) = e^{-3x} \sin(4x + c)$ とおく。

以下必要ならば定数 α を

$$\cos \alpha = -\frac{3}{5}, \quad \sin \alpha = \frac{4}{5}$$

を満たすものとして用いてよい。

(1) $g(x)$ の導関数 $g'(x)$ を求めよ。

(2) $g'(x)$ が $f(x)$ の定数倍になるように c を定めて不定積分

$$\int f(x) dx$$

を求めよ。

(3) $f(x) \geq 0$ となる x の範囲を求めよ。

(4) $n = 0, 1, 2, \dots$ に対して、曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれた図形の

$$\frac{n}{2}\pi \leq x \leq \frac{n+1}{2}\pi, \quad y \geq 0$$

の部分にある面積 S_n を求めよ。さらに $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k S_n$ を求めよ。

(30 点)

* 次のページはメモ欄です。正式な解答は解答用紙に記入しなさい。

3

両端が放物線 $y = x^2$ の上にある線分 AB の中点を P とする。点 A, B の x 座標をそれぞれ a, b とし, P の座標を (p, q) とする。

- (1) p および q を, a と b を用いて表せ。
- (2) 積 ab を, p と q を用いて表せ。
- (3) 線分 AB の長さが 4 であるとき q を p の式で表せ。
- (4) 線分 AB が長さを 4 に保って動くとき, q の最小値と, そのときの p の値を求めよ。

(30 点)

* 次のページはメモ欄です。正式な解答は解答用紙に記入しなさい。