

問題 1 の解答は解答用マークシートにマークしなさい。

1 次の文章中の ア から ミ までに当てはまる数字 0 ~ 9 を求めて、解答用マークシートの指定された欄にマークしなさい。ただし、分数は既約分数として表しなさい。(40 点, ただし数学科は 60 点)

(1) a, b, c を 1 から 9 までの整数とする。

(a) $a+b+c=n$ となる (a, b, c) の個数を $F(n)$ とする。 $n=4$ のとき, (a, b, c) は $(2, 1, 1), (1, 2, 1), (1, 1, 2)$ の 3 つで $F(4)=3$ である。また, $F(6)=$ ア イ, $F(9)=$ ウ エ である。

(b) $100a+10b+c$ が 3 の倍数で, $a+b+c \leq 9$ となる (a, b, c) の個数は オ カ である。

* 次のページはメモ欄です。正式な解答は解答用マークシートにマークしなさい。

- (2) 原点を O とする平面に 2 点 A, B をとり, その位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}, \vec{b}$ とおく。ベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は直交し, $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 1$ であるものとする。
点 P, Q, R をそれぞれ 線分 OA, AB, BO を $t:1-t$ ($0 < t < 1$) に内分する点とすると

$$\overrightarrow{QP} = (\boxed{\text{キ}}t - \boxed{\text{ク}})\vec{a} - t\vec{b}$$

$$\overrightarrow{QR} = (t - \boxed{\text{ケ}})\vec{a} - (\boxed{\text{コ}}t - \boxed{\text{サ}})\vec{b}$$

となる。ベクトル $\overrightarrow{QP}$ の長さが最小になるのは $t = \frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}} \boxed{\text{セ}}}$ のときで, そ

の長さは $\frac{\boxed{\text{ソ}}}{\sqrt{\boxed{\text{タ}} \boxed{\text{チ}}}}$ である。また, $\overrightarrow{QP}$ と $\overrightarrow{QR}$ が直交するのは $t = \frac{1}{\boxed{\text{ツ}}}$ と

$t = \frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}$ のときである。

* 次のページはメモ欄です。正式な解答は解答用マークシートにマークしなさい。

- (3) 2つの放物線 $C_1: y = x^2$ と $C_2: y = -(x-p)^2 + p + 2$ を考える。 C_2 が C_1 と異なる2点で交わるのは定数 p が

$$\boxed{ナ} - \sqrt{\boxed{ニ}} < p < \boxed{ヌ} + \sqrt{\boxed{ネ}} \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

となる場合である。このとき2つの交点の x 座標を α, β ($\alpha < \beta$) とすると

$$(\beta - \alpha)^2 = -p^2 + \boxed{ノ}p + \boxed{ハ}$$

となる。また、2つの放物線 C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= -\boxed{ヒ} \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx \\ &= \frac{1}{\boxed{フ}} (\beta - \alpha)^3 \end{aligned}$$

となる。これより、 p が $\textcircled{1}$ の範囲を動くとき S が最大となるのは $p = \boxed{ヘ}$ の

ときで、そのとき S は $\frac{\boxed{ホ}}{\boxed{マ}} \sqrt{\boxed{ミ}}$ である。

* 次のページはメモ欄です。正式な解答は解答用マークシートにマークしなさい。

問題 **2**, **3** の解答は解答用紙に記入しなさい。

2 a を定数として、関数

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 9|x - a| + 1$$

を考える。

- (1) $x > a$ の範囲で $f(x)$ は増加することを示せ。
- (2) 実数全体で $f(x)$ が増加するための a の条件を求めよ。
- (3) $x \geq -1$ の範囲での $f(x)$ の最小値を m とするとき、 m を a を用いて表せ。
- (4) 上の最小値 m が -3 となる a の値を求めよ。

(30 点, ただし数学科は 45 点)

* 次のページはメモ欄です。正式な解答は解答用紙に記入しなさい。

3

関数 $f(x)$ を次のように定める。

$$f(x) = \frac{\log x}{x} \quad (x > 0)$$

- (1) 関数 $f(x)$ の増減，凹凸を調べよ。
- (2) 4 以上の整数 k に対して次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\int_k^{k+1} f(x) dx < f(k) < \int_{k-1}^k f(x) dx$$

- (3) 正の整数 n に対して，定積分 $\int_n^{2n+1} f(x) dx$ を求めよ。

- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log n} \sum_{k=n}^{2n} \frac{\log k}{k}$ を求めよ。

(30 点，ただし数学科は 45 点)

* 次のページはメモ欄です。正式な解答は解答用紙に記入しなさい。