

1

(1) ア ; 6 イ ; 2 ウ ; 5

(2) エ ; 3 オ ; 4 カ ; 4 キ ; 1

ク ; 6 ケ ; 4

(3) コ ; 4 サ ; 3 シ ; 9 ス ; 9

(1)(2) 点 P_{n+1} における C の接線の方程式は,

$$y - f(x_{n+1}) = f'(x_{n+1})(x - x_{n+1})$$

であり, これが点 P_n を通ることから,

$$f(x_n) - f(x_{n+1}) = f'(x_{n+1})(x_n - x_{n+1})$$

よって, $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$ より,

$$\begin{aligned} f(x_n) - f(x_{n+1}) - f'(x_{n+1})(x_n - x_{n+1}) \\ &= (x_n^3 - x_{n+1}^3) - 3(x_n^2 - x_{n+1}^2) + 2(x_n - x_{n+1}) \\ &\quad - (3x_{n+1}^2 - 6x_{n+1} + 2)(x_n - x_{n+1}) \\ &= (x_n - x_{n+1}) \{x_n^2 + x_n x_{n+1} + x_{n+1}^2 - 3(x_n + x_{n+1}) + 2 \\ &\quad - (3x_{n+1}^2 - 6x_{n+1} + 2)\} \\ &= (x_n - x_{n+1}) \{(x_n + 2x_{n+1})(x_n - x_{n+1}) - 3(x_n - x_{n+1})\} \\ &= (x_n - x_{n+1})^2 (x_n + 2x_{n+1} - 3) \quad \cdots \textcircled{1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となり, $x_n \neq x_{n+1}$ より, $x_n + 2x_{n+1} - 3 = 0$

ここで, $x_0 = 0$ としても差し支えないから,

$$x_1 = \frac{3}{2}, \quad x_{n+1} = \frac{3 - x_n}{2} \quad \cdots \text{(答)}$$

(3) $x_{n+1} - 1 = -\frac{1}{2}(x_n - 1)$ より

$$\begin{aligned} x_n - 1 &= -\frac{1}{2}(x_{n-1} - 1) \\ &= \cdots \end{aligned}$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} (x_1 - 1) = -\left(-\frac{1}{2}\right)^n (n \geq 2)$$

これは $n=1$ のときも成り立つから,

$$x_n = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \quad \cdots \text{(答)}$$

(4) $\int_a^b (x-b)^2 (x-a) dx$

$$= \left[\frac{1}{3} (x-b)^3 (x-a) \right]_a^b - \frac{1}{3} \int_a^b (x-b)^3 dx$$

$$= \left[-\frac{1}{12} (x-b)^4 \right]_a^b = \frac{1}{12} (a-b)^4 \quad (\text{証明終})$$

(5) $S_n = \left| \int_{x_n}^{x_{n+1}} \{f(x) - f(x_{n+1}) - f'(x_{n+1})(x - x_{n+1})\} dx \right|$

となるが, ①を利用すると,

$$\begin{aligned} S_n &= \left| \int_{x_n}^{x_{n+1}} (x - x_{n+1})^2 (x_{n+1} + 2x_{n+1} - 3) dx \right| \\ &= \left| \int_{x_n}^{x_{n+1}} (x - x_{n+1})^2 (x - x_n) dx \right| \end{aligned}$$

よって, (4), (3)より,

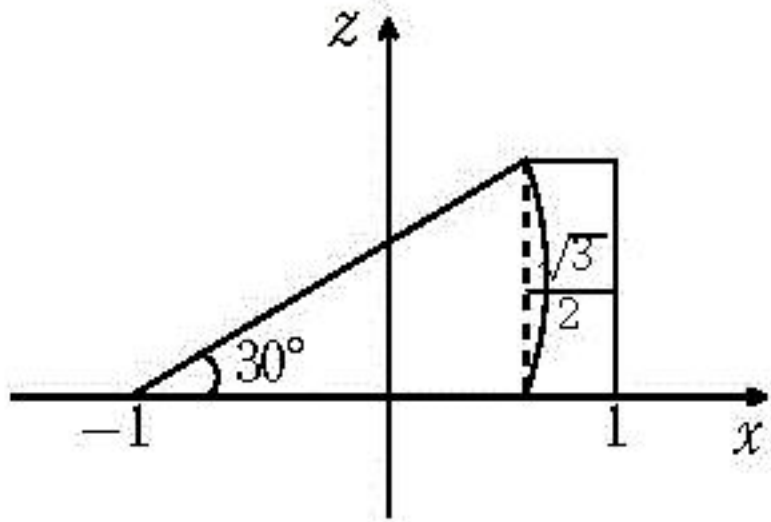
$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{12} (x_n - x_{n+1})^4 = \frac{1}{12} \left\{ \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right\}^4 \\ &= \frac{1}{12} \left(-\frac{1}{2}\right)^{4n} \left(-\frac{1}{2} - 1\right)^4 = \frac{1}{12} \frac{1}{2^{4n}} \left(\frac{3}{2}\right)^4 \\ &= \frac{27}{2^{4n+6}} \quad \cdots \text{(答)} \end{aligned}$$

3

(1) 立体 M は,

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 & \dots \textcircled{1} \\ z \leq \frac{1}{\sqrt{3}}(x+1) & \dots \textcircled{2} \\ 0 \leq z \leq \frac{\sqrt{3}}{2} & \dots \textcircled{3} \end{cases}$$

で表される. M を平面 $y=0$ で切った切口は,
右図のようになる.
よって



(i) $-1 < s \leq \frac{1}{2}$ のとき,

求める長方形の面積の高さは, $\frac{1}{\sqrt{3}}(s+1)$

また, 底辺の長さは①より $2\sqrt{1-s^2}$ よって求める面積を S とすると,

$$S = 2\sqrt{1-s^2} \times \frac{1}{\sqrt{3}}(s+1)$$

(ii) $\frac{1}{2} < s < 1$ のとき,

高さは常に $\frac{\sqrt{3}}{2}$ なので

$$S = 2\sqrt{1-s^2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\sqrt{1-s^2}$$

(i)(ii)より

$$\begin{cases} S = \frac{2}{\sqrt{3}}(s+1)\sqrt{1-s^2} & \left(-1 < s \leq \frac{1}{2}\right) \\ S = \sqrt{3}\sqrt{1-s^2} & \left(\frac{1}{2} < s < 1\right) \end{cases} \dots (\text{答})$$

(2) 立体 M の体積 V は,

$$\begin{aligned} V &= \frac{2}{\sqrt{3}} \int_{-1}^{\frac{1}{2}} (s+1)\sqrt{1-s^2} ds + \sqrt{3} \int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{1-s^2} ds \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\int_{-1}^{\frac{1}{2}} s\sqrt{1-s^2} ds + \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-s^2} ds \right) + \sqrt{3} \int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{1-s^2} ds \end{aligned}$$

となるが, $s\sqrt{1-s^2}$ は奇関数であり, また $\int_{-1}^1 \sqrt{1-s^2} ds$ は 半径 1 の
半円の面積を表す.

よって

$$\begin{aligned} V &= \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\sqrt{3}} \int_{\frac{1}{2}}^1 s\sqrt{1-s^2} ds - \frac{2}{\sqrt{3}} \int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{1-s^2} ds + \sqrt{3} \int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{1-s^2} ds \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}} \int_{\frac{1}{2}}^1 s\sqrt{1-s^2} ds + \frac{1}{\sqrt{3}} \int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{1-s^2} ds \end{aligned}$$

ここで $s = \sin \theta$ とおくと, $ds = \cos \theta d\theta$ となる.

s	$\frac{1}{2} \rightarrow 1$
θ	$\frac{\pi}{6} \rightarrow \frac{\pi}{2}$

より

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cdot \cos^2 \theta d\theta + \frac{1}{\sqrt{3}} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}} \left[-\frac{1}{3} \cos^3 \theta \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\theta d\theta + \frac{1}{2\sqrt{3}} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{7\pi}{6\sqrt{3}} - \frac{3}{8} = \frac{7\sqrt{3}}{18} \pi - \frac{3}{8} \dots (\text{答}) \end{aligned}$$