

1

(1)	ア	0	イ	0	ウ	1
	エ	0	オ	1	カ	1
	キ	0	ク	1	ケ	0
	コ	1				

(2)	ア	0	イ	0	ウ	1
	エ	1	オ	0		

2

$$(1) \quad \vec{v} = (-2t \sin t^2, 2t \cos t^2)$$

であるから, $\vec{OQ} = \vec{OP} + \vec{v}$ により, 点Qの座標は,

$$Q(\cos t^2 - 2t \sin t^2, \sin t^2 + 2t \cos t^2) \quad \cdots \text{答}$$

$$(2) \quad OQ^2 = (\cos t^2 - 2t \sin t^2)^2 + (\sin t^2 + 2t \cos t^2)^2 \\ = 1 + 4t^2$$

となるから, 点Qの原点からの距離は $t \geq 0$ について単調増加となり, 点Qの軌跡は自分自身と交わらない。(証明終)

(3)

$$(a) \quad t_n \text{ は, } \sin t_n^2 + 2t_n \cos t_n^2 = 0, \text{ つまり,}$$

$$\tan t_n^2 = -2t_n$$

をみたす。

$$s_n = t_n^2 \text{ とすると,}$$

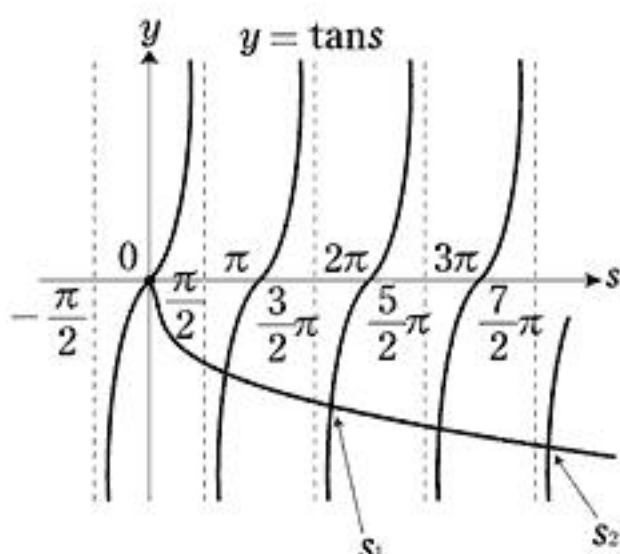
$$\tan s_n = -2\sqrt{s_n}$$

$y = \tan s$ と $y = -2\sqrt{s}$ の交点のs座標の値を1つおきにとって

$$0 = s_0 < s_1 < s_2 < s_3 < \cdots$$

と定まるから, 右図により,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (t_{n+1}^2 - t_n^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_{n+1} - s_n) = 2\pi \quad \cdots \text{答}$$



(b) 再び図により,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - 2n\pi) = -\frac{\pi}{2} \quad \text{となるから,}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{s_n}{n} - 2\pi \right) = -\frac{\pi}{2n}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_n^2}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n}{n} = 2\pi$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{2\pi} \quad \cdots \text{答}$$

また,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (t_{n+1} - t_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_{n+1}^2 - t_n^2}{\frac{t_{n+1}}{\sqrt{n}} + \frac{t_n}{\sqrt{n}}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_{n+1}^2 - t_n^2}{\sqrt{\frac{n+1}{n}} \cdot \frac{t_{n+1}}{\sqrt{n+1}} + \frac{t_n}{\sqrt{n}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{2\pi} + \sqrt{2\pi}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

3

(1) $f(x)$ が意味をもつためには,

$$\sin^2 x > 0 \quad \text{かつ} \quad \sin x + \cos x > 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x \neq 0 \quad \text{かつ} \quad \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) > 0$$

これは $0 < x < \pi$ の範囲では,

$$0 < x < \frac{3}{4}\pi \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} \text{次に } f(x) &= \frac{\log_{\frac{1}{2}}(\sin^2 x)}{\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}} + \log_{\frac{1}{2}}(\sin x + \cos x) \\ &= \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{2}}(\sin^2 x) + \log_{\frac{1}{2}}(\sin x + \cos x) \\ &= \log_{\frac{1}{2}} \sin x (\sin x + \cos x) \end{aligned}$$

となるから,

$$h(x) = \sin x (\sin x + \cos x)$$

とすると,

$$f(x) \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad h(x) \geq 1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$h(x)$ の増減表は

$$\begin{aligned} h'(x) &= \cos x (\sin x + \cos x) + \sin x (\cos x - \sin x) \\ &= 2 \sin x \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= \sin 2x + \cos 2x \\ &= \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

により, 右のようになり, また,

$$\begin{aligned} h(x) = 1 &\Leftrightarrow \sin^2 x + \sin x \cos x = 1 \\ &\Leftrightarrow \sin x \cos x - \cos^2 x = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos x (\sin x - \cos x) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}, \quad \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

x	0	...	$\frac{3}{8}\pi$	...	$\frac{3}{4}\pi$
$h'(x)$		+	0	-	
$h(x)$	0	↗		↘	0

であるから, ① の範囲では,

$$\textcircled{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \quad \cdots \text{答}$$

また, $h(x)$ が最大るとき $f(x)$ は最小となるから,

$$x_0 = \frac{3}{8}\pi \quad \cdots \text{答}$$

(2)

$$\begin{aligned} \text{(a) } g(x) &= \log_2(\sin x) + \frac{\log_2(\cos x + 1)}{\log_2 4} \\ &= \frac{1}{2} \log_2(\sin^2 x) + \frac{1}{2} \log_2(\cos x + 1) \\ &= \frac{1}{2} \log_2 \sin^2 x (\cos x + 1) \\ &= \frac{1}{2} \log_2 (1 - \cos^2 x)(\cos x + 1) \end{aligned}$$

となるから, $t = \cos x$, $u(t) = (1 - t^2)(t + 1)$

とすると, $g(x) = \frac{1}{2} \log_2 u(t)$ と表せる。

$$\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 \leq t \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned} \text{であり, } u(t) &= -t^3 - t^2 + t + 1 \\ u'(t) &= -3t^2 - 2t + 1 \\ &= -(t + 1)(3t - 1) \end{aligned}$$

t	0	...	$\frac{1}{3}$	...	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$u'(t)$		+	0	-	
$u(t)$	1	↗	$\frac{32}{27}$	↘	

となるから, $u(t)$ の増減表は右のようになる。

$$u\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 1\right) < \frac{1}{2} (1 + 1) = 1 = u(0)$$

より

$$\begin{aligned} g(x) \text{ の最大値: } \quad \frac{1}{2} \log_2 u\left(\frac{1}{3}\right) &= \frac{1}{2} \log_2 \frac{32}{27} \\ &= \frac{1}{2} (5 - 3 \log_2 3) \quad \cdots \text{答} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(x) \text{ の最小値: } \quad \frac{1}{2} \log_2 u\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= \frac{1}{2} \log_2 \frac{2 + \sqrt{2}}{4} \\ &= \frac{1}{2} \log_2 (2 + \sqrt{2}) - 1 \quad \cdots \text{答} \end{aligned}$$

(b) $g(x) \Leftrightarrow u(t) = 1 \quad \cdots \textcircled{3}$

であり, 増減表を見ると, 中間値の定理より, ③は,

$$\frac{1}{3} < t_1 < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

をみたす解 t_1 をもつ。よって, $t_1 = \cos x_1$ をみたす x_1 をとると,

x_1 は ③ の解となり, $\frac{\pi}{4} < x_1 < \frac{\pi}{2}$ をみたす。

また, $u(t)$ は $t_1 \leq t \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ で単調減少だから

$g(x)$ は $\frac{\pi}{4} \leq x \leq x_1$ で単調増加となり, さらに

$u(t)$ は $0 < t < t_1$ で $u(t) > 1$ となるから

$g(x)$ は $x_1 < x < \frac{\pi}{2}$ で正となる。(証明終)

(3) $u(t_1) = 1$ より,

$$-t_1^3 - t_1^2 + t_1 = 0$$

$$t_1(t_1^2 + t_1 - 1) = 0$$

$t_1 > 0$ より,

$$\cos x_1 = t_1 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

また,

$$\cos^2 x_0 = \frac{1 + \cos 2x_0}{2} = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$$

であるから

$$\cos^2 x_1 = \frac{6 - 2\sqrt{5}}{4}$$

として比較すると,

$$2 - \sqrt{2} < 2 - 1 = 1 = 6 - \sqrt{25} < 6 - 2\sqrt{5}$$

より

$$\cos^2 x_0 < \cos^2 x_1$$

となるから

$$x_0 > x_1 \quad \cdots \text{答}$$