

1

(1)	ア	9	イ	5	ウ	8	エ	5
	オ	5	カ	6	キ	5	ク	5
	ケ	2	コ	5	サ	5	シ	6
	ス	5	セ	5	ソ	2	タ	5
	チ	5	ツ	1	テ	0		

(2)	ア	5	イ	0	ウ	4	エ	0
	オ	1	カ	6	キ	2	ク	5
	ケ	4	コ	4				

(3)	ア	1	イ	2	ウ	3	エ	4
	オ	1	カ	2	キ	5	ク	1
	ケ	9	コ	2	サ	1	シ	4
	ス	1	セ	3				

$$\begin{aligned}
 (1) \quad (a) \quad y &= \log \sqrt{1 + \cos^2 \left(\frac{x}{2} \right)} \\
 &= \frac{1}{2} \log \left(1 + \cos^2 \left(\frac{x}{2} \right) \right) \\
 y' &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \cos^2 \frac{x}{2}} \cdot 2 \cos \frac{x}{2} \left(-\sin \frac{x}{2} \right) \cdot \frac{1}{2} \\
 &= \frac{-\sin x}{4 \left(1 + \frac{1 + \cos x}{2} \right)} = -\frac{\sin x}{2(3 + \cos x)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (b) \quad y &= (\sqrt{x})^x \\
 &= x^{\frac{1}{2}x} \\
 &= e^{\frac{1}{2}x \log x} \\
 y' &= e^{\frac{1}{2}x \log x} \cdot \frac{1}{2} \left(\log x + x \cdot \frac{1}{x} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}x} (1 + \log x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad (a) \quad I &= \int e^{-t} \sin t \, dt \\
 &= \int (-e^{-t})' \sin t \, dt \\
 &= -e^{-t} \sin t - \int (-e^{-t}) \cos t \, dt \\
 &= -e^{-t} \sin t - e^{-t} \cos t - \int (-e^{-t}) (\sin t) \, dt \\
 &= -e^{-t} (\sin t + \cos t) - I + C \quad (C \text{ は積分定数})
 \end{aligned}$$

よって, $I = -\frac{1}{2} e^{-t} (\sin t + \cos t) + C'$ (C' は積分定数)

$$\left(= -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-t} \sin \left(t + \frac{\pi}{4} \right) + C' \right) \quad (C' \text{ は積分定数})$$

$$\begin{aligned}
 (b) \quad &\int_0^{2\pi} e^{-t} |\sin t| \, dt \\
 &= \int_0^{\pi} e^{-t} \sin t \, dt - \int_{\pi}^{2\pi} e^{-t} \sin t \, dt
 \end{aligned}$$

ここで $t = u + \pi$ として $dt = du$,

$$\begin{aligned}
 \int_{\pi}^{2\pi} e^{-t} \sin t \, dt &= \int_0^{\pi} e^{-(u+\pi)} \sin(u+\pi) \, du \\
 &= -e^{-\pi} \int_0^{\pi} e^{-u} \sin u \, du
 \end{aligned}$$

求める値は,

$$\begin{aligned}
 &(1 + e^{-\pi}) \int_0^{\pi} e^{-u} \sin u \, du \\
 &= (1 + e^{-\pi}) \left[-\frac{1}{3} e^{-t} (\sin t + \cos t) \right]_0^{\pi} \\
 &= (1 + e^{-\pi}) \left(-\frac{1}{2} e^{-\pi} (-1) + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \right) \\
 &= \frac{1}{2} (1 + e^{-\pi})^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad A \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \\
 &= \left(\alpha \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix} \right) \beta \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

「ある列ベクトル $\vec{x}$ に対して $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ 」

$\iff$ 「ある列ベクトル $\vec{x}$ に対して $(A - \lambda E)\vec{x} = \vec{0}$ 」

$\iff \det(A - \lambda E) = 0$

$\iff (1 - \lambda)(3 - \lambda) - (-4)(-2) = 0$

$\iff \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$

$\iff (\lambda - 5)(\lambda + 1) = 0$

$\iff \lambda = 5, -1$

$\alpha > \beta$ だから $\alpha = 5, \beta = -1$

$$A - 5E = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \text{ かつ } \frac{p_{11}}{p_{21}} = -1$$

$$A + E = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \text{ かつ } \frac{p_{12}}{p_{22}} = 2$$

3

(1) $\overrightarrow{OA}$ を $\frac{\pi}{2}$ 回転 a 倍したものが $\overrightarrow{OB}$

であり, $\triangle OAB$ は $\angle AOB = \frac{\pi}{2}$ の直角三角形

$$|z_2| = a|z_1|, \quad |z_1 - z_2| = \sqrt{1+a^2} |z_1|$$

$$\text{を } |z_1| + |z_2| + |z_1 - z_2| = 1$$

$$\text{に代入して } (1+a+\sqrt{1+a^2})|z_1| = 1$$

$$\begin{aligned} \text{よって } |z_1| &= \frac{1}{1+a+\sqrt{1+a^2}} \\ &= \frac{1+a-\sqrt{1+a^2}}{(1+a)^2 - (1+a^2)} \\ &= \frac{1+a-\sqrt{1+a^2}}{2a} \end{aligned}$$

$$\left(= \frac{1}{2\sqrt{a}} \left(\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}} - \sqrt{a + \frac{1}{a}} \right) \right)$$

$$(2) \triangle OAB = \frac{1}{2} |z_1|^2 a$$

$$= \frac{(1+a-\sqrt{1+a^2})^2}{8a}$$

$$\left(= \frac{1}{8} \left(\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}} - \sqrt{a + \frac{1}{a}} \right)^2 \right)$$

$$(3) \quad m = \sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}}$$

$$\text{とおけば } a + \frac{1}{a} = m^2 - 2 \text{ となり,}$$

$$\triangle OAB = \frac{1}{8} (m - \sqrt{m^2 - 2})^2$$

$$(4) \quad a > 0 \text{ のとき } m \geq 2\sqrt{\sqrt{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{a}}} = 2$$

$$m > 2 \text{ において } f(m) = m - \sqrt{m^2 - 2}$$

の最大値を調べる。

$$\begin{aligned} f'(m) &= 1 - \frac{2m}{2\sqrt{m^2 - 2}} \\ &= \frac{\sqrt{m^2 - 2} - m}{\sqrt{m^2 - 2}} < 0 \end{aligned}$$

$$\text{単調減少で最大値 } f(2) = 2 - \sqrt{2}$$

$$m = 2 \text{ となるのは } \sqrt{a} = \frac{1}{\sqrt{a}}$$

すなわち $a=1$ のときで,

$$\text{このとき, 最大値 } \triangle OAB = \frac{1}{8} (2 - \sqrt{2})^2 = \underline{\underline{\frac{3-2\sqrt{2}}{4}}}$$

