

1

(1)    ア    4            イ    7            ウ    3            エ    1            オ    6

(2)    ア    3            イ    2            ウ    1            エ    5            オ    3

      カ    2            キ    1            ク    1            ケ    0            コ    1

      サ    1            シ    0            ス    1            セ    1            ソ    0

*p*    —            *q*    —            *r*    —

(3)    ア    3            イ    2            ウ    5            エ    2            オ    5

      カ    1            キ    3            ク    4            ケ    8

[2]

$$(1) \quad \frac{dx}{dt} = \sin t$$

$$\frac{dy}{dt} = 1 - \cos t + \sin t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1 - \cos t + \sin t}{\sin t}$$

$$\begin{aligned} &= 1 + \frac{2 \cdot \sin^2 \frac{t}{2}}{2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}} \\ &= 1 + \tan \frac{t}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \int \frac{\log x}{(x+1)^2} dx &= -\frac{\log x}{x+1} - \int -\frac{1}{x(x+1)} dx \\ &= -\frac{\log x}{x+1} + \int \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx \\ &= -\frac{\log x}{x+1} + \log|x| - \log|x+1| + C \\ &= -\frac{\log x}{x+1} + \log \left| \frac{x}{x+1} \right| + C \end{aligned}$$

$$(3) \quad \begin{cases} a = r \cos \theta \\ b = r \sin \theta \end{cases}, \quad \begin{cases} c = s \cos \varphi \\ d = s \sin \varphi \end{cases} \quad r, s > 0, \quad \theta, \varphi \in \mathbb{R}$$

と表すことができ、加法定理を用いて、

$$\begin{aligned} (a) \quad AC &= rs \begin{pmatrix} \cos(\theta + \varphi) & \sin(\theta + \varphi) \\ -\sin(\theta + \varphi) & \cos(\theta + \varphi) \end{pmatrix} \\ &= E \end{aligned}$$

よって  $rs = 1$ ,  $\varphi = -\theta$  としてよく、

$$c = \frac{1}{r} \cos(-\theta) = \frac{1}{r^2} \cdot r \cos \theta = \frac{a}{a^2 + b^2}$$

$$d = \frac{1}{r} \sin(-\theta) = -\frac{1}{r^2} \cdot r \sin \theta = -\frac{b}{a^2 + b^2}$$

[別解]

$AC = E$  より、 $C$  は  $A$  の逆行列

$$\therefore C = A^{-1}$$

$$= \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

$$\therefore c = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad d = -\frac{b}{a^2 + b^2}$$

$$(b) \quad A^3 = r^3 \begin{pmatrix} \cos 3\theta & \sin 3\theta \\ -\sin 3\theta & \cos 3\theta \end{pmatrix} = E$$

$$\text{から, } r = 1, \quad \begin{cases} \cos 3\theta = 1 \\ \sin 3\theta = 0 \end{cases}$$

$$0 \leq \theta < 2\pi \text{ で考え, } \theta = 0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$$

$$\text{よって } \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$(c) \quad A^6 = r^6 \begin{pmatrix} \cos 6\theta & \sin 6\theta \\ -\sin 6\theta & \cos 6\theta \end{pmatrix}$$

$$r = 1, \text{ 同様に } \theta = \frac{n\pi}{6} \quad (n = 0, 1, 2, 3, 4, 5) \text{ として,}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pm \frac{1}{2} \\ \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \quad (\text{複号任意})$$

3

$$(1) \quad \overrightarrow{OM} = t\vec{a} + (1-t)\vec{c}$$

$$\overrightarrow{ON} = t\overrightarrow{OE} + (1-t)\vec{b}$$

$$= t(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) + (1-t)\vec{b} = t\vec{a} + \vec{b} + t\vec{c}$$

$$\overrightarrow{OG} = \vec{a} + \vec{b}$$

$$\text{よって, } \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = \vec{b} + (2t-1)\vec{c}$$

$$\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OM} = (1-t)\vec{a} + \vec{b} - (1-t)\vec{c}$$

$$(2) \quad \begin{cases} 0 = \overrightarrow{MN} \cdot \vec{u} = \beta + 2t - 1 \\ 0 = \overrightarrow{MG} \cdot \vec{u} = \alpha(1-t) + \beta - (1-t) \end{cases}$$

これを  $\alpha, \beta$  について解くと

$$\begin{cases} \alpha = \frac{t}{1-t} \\ \beta = 1 - 2t \end{cases}$$

$$(3) \quad \overrightarrow{OP} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OG}) = \frac{1+2t}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$$

直線の点を  $X$  として  $s \in \mathbb{R}$  を用いて

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + s\vec{u}$$

$$= \left(\frac{1+2t}{3} + s\alpha\right)\vec{a} + \left(\frac{2}{3} + s\beta\right)\vec{b} + \left(\frac{1}{3} + s\right)\vec{c}$$

と表せる。

$$\begin{cases} \frac{1}{3} + s = 1 \\ \frac{1+2t}{3} + s\alpha = \frac{2}{3} + s\beta \end{cases}$$

から  $s = \frac{2}{3}$  であり, (2) で求めた  $\alpha, \beta$  を用いて

$$\frac{1+2t}{3} + \frac{2}{3} \frac{t}{1-t} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}(1-2t)$$

$$\Leftrightarrow (1+2t)(1-t) + 2t = (4-4t)(1-t)$$

$$\Leftrightarrow 6t^2 - 11t + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (3t-1)(2t-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{1}{3}, \frac{3}{2}$$

$$0 < t < 1 \text{ から, } t = \frac{1}{3}$$

$$(4) \quad s = \frac{2}{3} \text{ として,}$$

$$\begin{cases} 0 \leq \frac{1+2t}{3} + \frac{2}{3} \frac{t}{1-t} \leq 1 \quad \cdots \textcircled{1} \\ 0 \leq \frac{4}{3}(1-t) \leq 1 \quad \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

なる  $t$  の条件を考えるが,  $0 < t < 1$  で

$$\textcircled{2} \Leftrightarrow 0 \leq 1-t \leq \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq t \leq 1$$

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow 0 \leq (1+2t)(1-t) + 2t \leq 3(1-t)$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq -2t^2 + 3t + 1 \leq 3 - 3t$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2t^2 - 3t - 1 \leq 0 \\ 2t^2 - 6t + 2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3-\sqrt{17}}{4} \leq t \leq \frac{3+\sqrt{17}}{4} \\ t \leq \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2} \leq t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 0 < t \leq \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

$$(\text{ただし, } \frac{3-\sqrt{17}}{4} < 0 < \frac{3-\sqrt{5}}{2} < 1 < \frac{3+\sqrt{17}}{4} < \frac{3+\sqrt{5}}{2})$$

$$\text{求める範囲は } \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$