

1

(1) ア 8 イ 3 ウ 1 エ 8 オ 1
 カ 6

(2) キ 0 ク 1 ケ 3 コ 1
 サ 4 シ 5 ス 4 セ 6 ソ 3

(3) タ 3 チ 1 ツ 5 テ 2

- (1) $T_{n+1}(a_{n+1}, b_{n+1})$ における C の接線は, $a_{n+1}x - \frac{1}{12}b_{n+1}y = 1$
 これが $(0, a_n)$ を通るから,

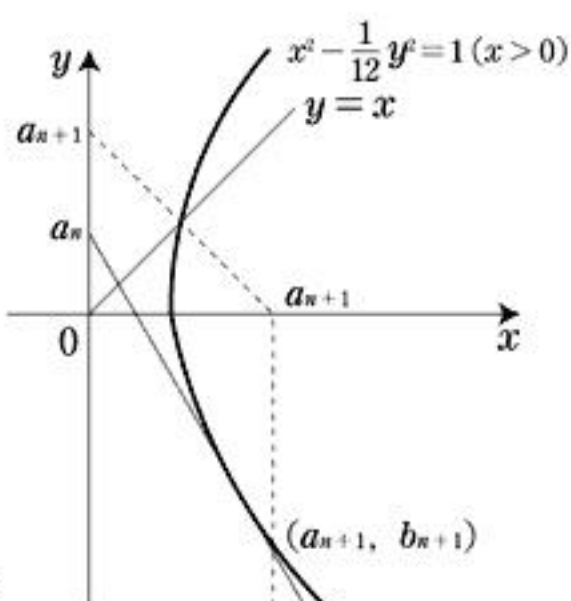
$$-\frac{1}{12}b_{n+1}a_n = 1 \quad \cdots *$$

$$b_{n+1} = -\frac{12}{a_n}$$

$$(a_{n+1}, b_{n+1}) = \left(a_{n+1}, -\frac{12}{a_n}\right) \text{ は}$$

$$C \text{ の点だから, } a_{n+1}^2 - \frac{12}{a_n^2} = 1$$

$$\text{すなわち, } a_{n+1}^2 = 1 + \frac{12}{a_n^2} \quad \cdots \star$$



ここで, $a_n > 0$ ($n=1, 2, 3, \dots$) が点 T_n の定め方から成り立つことに注意し,

$$a_{n+1} = \sqrt{1 + \frac{12}{a_n^2}} = \frac{\sqrt{12 + a_n^2}}{a_n} \quad (\text{どちらの表し方でもよい})$$

$$(2) \quad \star \text{ から, } a_{n+1}^2 + 3 = 4 + \frac{12}{a_n^2} = \frac{4(a_n^2 + 3)}{a_n^2}$$

$a_n^2 + 3 \neq 0$ から逆数をとって,

$$\frac{1}{a_{n+1}^2 + 3} = \frac{a_n^2 + 3 - 3}{4(a_n^2 + 3)} = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{a_n^2 + 3}$$

$$\text{すなわち, } c_{n+1} = \frac{1}{4} - \frac{3}{4}c_n$$

これは, $c_{n+1} - \frac{1}{7} = -\frac{3}{4}\left(c_n - \frac{1}{7}\right)$ と変形でき,

$\left\{c_n - \frac{1}{7}\right\}$ は公比 $-\frac{3}{4}$ の等比数列だから,

$$\begin{aligned} c_n - \frac{1}{7} &= \left(-\frac{3}{4}\right)^n \left(c_0 - \frac{1}{7}\right) \\ &= \left(-\frac{3}{4}\right)^n \left(\frac{1}{1^2 + 3} - \frac{1}{7}\right) \\ &= \frac{3}{7 \cdot 4} \left(-\frac{3}{4}\right)^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{7} \left(1 + \frac{3}{4} \left(-\frac{3}{4}\right)^n\right) \\ &= \frac{1}{7} \left(1 - \left(-\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right) \end{aligned}$$

$$(3) \quad c_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{7} \text{ であり, } \frac{1}{(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n)^2 + 3} = \frac{1}{7} \text{ から,}$$

$$(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n)^2 = 4$$

$$a_n > 0 \text{ だから } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$$

* から $b_n < 0$ に注意して, $(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n)^2 - \frac{1}{12}(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n)^2 = 1$ から

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -6$$

$(a_n, b_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (2, -6)$ といえる。

(1) $f(x)$ が偶関数であることに注意し,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 f(x) dx &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1 + \tan^2 \theta} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta \\ &\quad \left(x = \tan \theta, \quad dx = \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta \right) \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = 2[\theta]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2} \\ \int_{-1}^1 (f(x))^2 dx &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{1 + \tan^2 \theta} \right)^2 \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 \theta d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta \\ &= 2 \left[\frac{1}{2} \theta + \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 2 \left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \right) \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\text{(a)} \quad l_k^2 &= (x_k - a)^2 + (f(x_k) - b)^2 \\ &= a^2 + b^2 + 2ax_k + x_k^2 - 2bf(x_k) + f(x_k)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} l_k^2 &= a^2 + b^2 - a \cdot \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} x_k + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} x_k^2 \\ &\quad - b \cdot \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_k))^2 \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} a^2 + b^2 - a \int_{-1}^1 x dx + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x^2 dx \\ &\quad - b \int_{-1}^1 f(x) dx + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (f(x))^2 dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore L &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} l_k^2 \\ &= a^2 + b^2 - a \int_{-1}^1 x dx + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x^2 dx \\ &\quad - b \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}L &= a^2 + b^2 - a \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 2 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 - b \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right) \\ &= a^2 + b^2 + \frac{1}{3} - \frac{\pi}{2} b + \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \\ &= a^2 + b^2 - \frac{\pi}{2} b + \frac{\pi}{8} + \frac{7}{12}\end{aligned}$$

$$\text{(b)} \quad L = a^2 + \left(b - \frac{\pi}{4} \right)^2 + \frac{7}{12} + \frac{\pi}{8} - \frac{\pi^2}{16} \text{ から,}$$

$(a, b) = \left(0, \frac{\pi}{4} \right)$ のとき, L は最小値 $\frac{7}{12} + \frac{\pi}{8} - \frac{\pi^2}{16}$ をとる。