

①

(1) ア 2

イ 3

ウ 3

エ 1

オ 3

(2) カ 1

キ 4

ク 2

ケ 5

コ 2

サ 3

シ 0

ス 1

セ 1

ソ 1

タ 2

(3) チ 1

ツ 2

テ 1

ト 3

ナ 7

ニ 6

ヌ 3

ネ 7

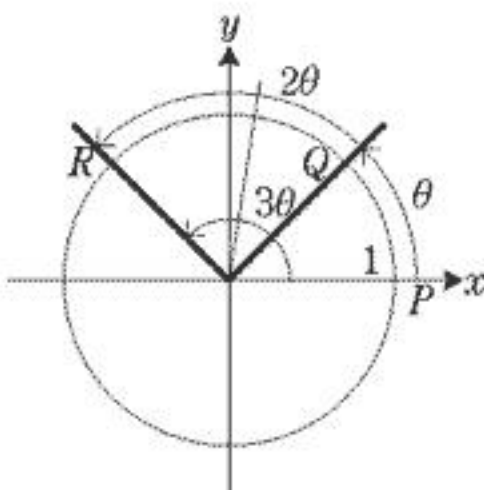
ノ 3

ハ 5

ヒ 7

[2]

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \overline{PQ}^2 &= |z-1|^2 \\
 &= |(\cos\theta - 1) + i\sin\theta|^2 \\
 &= (\cos\theta - 1)^2 + \sin^2\theta \\
 &= 2(1 - \cos\theta)
 \end{aligned}$$



$$\left(\begin{aligned}
 \langle \text{別} \rangle \quad \overline{PQ}^2 &= \overline{OP}^2 + \overline{OQ}^2 - 2\overline{OP} \cdot \overline{OQ} \cos\theta \\
 &= 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos\theta \\
 &= 2(1 - \cos\theta)
 \end{aligned} \right)$$

(2) 角の関係をみて

$$\begin{aligned}
 L &= 2(1 - \cos\theta) + 2(1 - \cos 2\theta) + 2(1 - \cos 3\theta) \\
 &= 2(3 - (\cos\theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta)) \\
 &= 2(3 - (\cos 2\theta + 2\cos\theta \cos\theta)) \\
 &= 2(3 - \cos 2\theta + (1 + 2\cos\theta)) \\
 &= 2(3 - (2\cos^2\theta - 1)(1 + 2\cos\theta)) \\
 &= 2(3 - (2t^2 - 1)(1 + 2t)) \\
 &= -4(2t^3 + t^2 - t - 2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \frac{dL}{dt} &= -4(6t^2 + 2t - 1) \\
 &= -24\left(t - \frac{-1 - \sqrt{7}}{6}\right)\left(t - \frac{-1 + \sqrt{7}}{6}\right)
 \end{aligned}$$

ここで $-1 < \frac{-1 - \sqrt{7}}{6} < 0 < \frac{-1 + \sqrt{7}}{6} < 1$ であり,

$$\alpha = \frac{-1 - \sqrt{7}}{6}, \quad \beta = \frac{-1 + \sqrt{7}}{6} \quad \text{として}$$

増減は

t	-1		α		β		1
$\frac{dL}{dt}$		-	0	+	0	-	
L		$\searrow$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

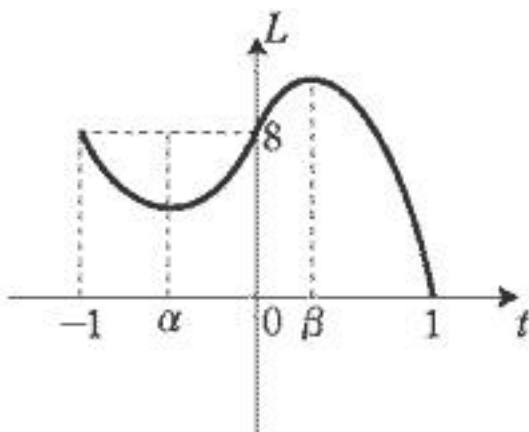
$t = -1$ のとき $L = 8$

$t = 0$ のとき $L = 8$

となるので,

$t = \beta$ で最大となる

$$t = \frac{-1 + \sqrt{7}}{6}$$



$$(4) \quad 0 < \frac{\sqrt{7} - 1}{6} < \frac{3 - 1}{6} < \frac{1}{2}$$

であり, $\cos\theta$ が単調減少であること, $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $\cos\frac{\pi}{2} = 0$

を合わせて, $\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{2}$ となる。

[3]

$$(1) \quad f(x) = \log|1 + (x-a)(a+t-x)|$$

$x-a=u$ とおけば

$dx=du$ であり,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_0^t \log|1+u(t-u)|du$$

したがってこれは t のみの関数で a によらない

$$(2) \quad F_1(x) = x - \log(1+x)$$

$$F_2(x) = \log(1+x) - (x - \frac{x^2}{2})$$

とおく

$$F_1(0) = F_2(0) = 0$$

また

$$F_1'(x) = 1 - \frac{1}{1+x}$$

$$= \frac{x}{1+x}$$

$$F_2'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x$$

$$= \frac{x^2}{1+x}$$

であり, $F_1'(x) \geq 0, F_2'(x) \geq 0 \quad (x \geq 0)$

したがって $F_1(x) \geq 0, F_2(x) \geq 0 \quad (x \geq 0)$

与不等式は成り立つ

$$(3) \quad S(t) = \int_0^t \log|1+u(t-u)|du \quad ((1)により)$$

であり, $0 \leq u \leq t$ において $u(t-u) \geq 0$

であるから, 被積分関数は (2) を用いて

$$u(t-u) - \frac{u^2(t-u)^2}{2} \leq \log(1+u(t-u)) \leq u(t-u)$$

をみたとす, この左辺を $g_1(u)$, 右辺を $g_2(u)$ とおく

また,

$$S_1(t) = \int_0^t g_1(u)du$$

$$S_2(t) = \int_0^t g_2(u)du \quad \text{とおく}$$

($g_1(u)$ と t の多項式として展開する)

$$g_1(u) = \frac{1}{2}u(t-u)(2-u(t-u))$$

$$= \frac{1}{2}u(t-u)(ut - (u^2 + 2))$$

$$= -\frac{1}{2}u^2t^2 + u(u^2 + 1)t - \frac{1}{2}u^2(u^2 + 2)$$

$$S_1(t) = -\frac{1}{2}t^2 \int_0^t u^2 du + t \int_0^t (u^3 + u) du - \frac{1}{2} \int_0^t (u^4 + 2u^2) du$$

$$= -\frac{1}{2}t^2 \cdot \frac{1}{3}t^3 + t \left(\frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{2}t^2 \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5}t^5 + \frac{2}{3}t^3 \right)$$

$$= \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \frac{1}{10} \right) t^5 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) t^3$$

$$= -\frac{1}{60}t^5 + \frac{1}{6}t^3$$

$$S_2(t) = t \int_0^t u du - \int_0^t u^2 du$$

$$= t \cdot \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3$$

$$= \frac{1}{6}t^3$$

したがって

「 $0 \leq u \leq t$ において

$$g_1(u) \leq \log[1+u(t-u)] \leq g_2(u) \quad \text{]」}$$

から $S_1(t) \leq S(t) \leq S_2(t)$,

$$\frac{S_1(t)}{t^3} \leq \frac{S(t)}{t^3} \leq \frac{S_2(t)}{t^3}$$

$$\text{となり} \quad \frac{S_1(t)}{t^3} = -\frac{1}{60}t^2 + \frac{1}{6} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{1}{6},$$

$$\frac{S_2(t)}{t^3} = \frac{1}{6}$$

から, 「はさみうちの原理」により

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{S(t)}{t^3} = \frac{1}{6} \quad \text{と得る}$$