

A 1 数 学

この冊子は、数学の問題で 1 ページより 5 ページまであります。

〔注 意〕

- (1) 試験開始の指示があるまで、この冊子を開いてはいけません。
- (2) 受験番号等記入の指示があったら、直ちに解答用紙に志望学科・受験番号を記入しなさい。解答用マークシートには受験番号および氏名を記入し、さらに受験番号・志望学科をマークしなさい。
- (3) 解答は所定の解答用紙に記入したものおよび解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。
- (4) 解答用マークシートについて
 - ① 解答用マークシートは絶対に折り曲げてはいけません。
 - ② マークには黒鉛筆(HBまたはB)を使用しなさい。指定の黒鉛筆以外でマークした場合は採点されません。
 - ③ 誤ってマークした場合は消しゴムで丁寧に消し、消しくずを完全に取り除いた上、新たにマークし直しなさい。
 - ④ マークは横 1 行について 1 箇所に限ります。2 箇所以上マークすると採点されません。あいまいなマークは無効となるので、はっきりマークしなさい。
- (5) 試験開始の指示があったら、初めに問題冊子のページ数を確認しなさい。
- (6) 問題冊子は、試験終了後、持ち帰りなさい。

問題 1 の解答は解答用マークシートにマークせよ。

1 次の (1) から (3) において、 内のカタカナにあてはまる 0 から 9 までの数字を求め、その数字を解答用マークシートにマークせよ。ただし、 は 2 桁の数を表すものとする。また、分数は既約分数として表すものとする。 (30 点)

(1) i を虚数単位とし、 $\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ とする。このとき自然数 n を ア で割った余りが イ ならば $(1 + \omega)^n = \omega$ であり、 n を ア で割った余りが ウ ならば $(1 + \omega)^n = -\omega$ となる。

(2) $t \geq 0$ とするとき、座標平面において点 P が放物線 $y = x^2$ 上を動くときの、点 P と点 $(0, t)$ との距離の 2 乗の最小値を $f(t)$ とする。このとき $f(1) = \frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ である。また、曲線 $y = f(x)$ と、 y 軸および直線 $y = 1$ で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積は

$$\pi \times \frac{\boxed{\text{カ}} \boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}} \boxed{\text{ケ}}}$$

となる。

- (3) 3 次関数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 3$ の係数 a, b, c は 1 から 9 までの自然数であるとする。このとき $f'(x)$ を $f(x)$ の導関数として、 x の 2 次方程式 $f'(x) = 0$ の解がすべて整数であるような a, b, c の組は全部で コ 個ある。またそれらのうちで、 x の 3 次方程式 $f(x) = f'(x)$ の解がすべて整数であるのは $a =$ サ, $b =$ シ, $c =$ ス という組である。

問題 **2** の解答は解答用紙に記入せよ。答だけでなく、答を導く過程も記入せよ。

2 関数 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ のグラフを C とし、 C 上の互いに相異なる点の列 $\{P_n\}$ が次の条件 (*) をみたすように定められている：

(*) $\left\{ \begin{array}{l} \text{点 } P_1 \text{ は原点 } O(0,0) \text{ とは異なり、点 } P_1 \text{ における } C \text{ の接線は原点 } O \text{ を通} \\ \text{る。} n = 1, 2, 3, \dots \text{ に対して点 } P_{n+1} \text{ における } C \text{ の接線は } P_n \text{ を通る。} \end{array} \right.$

また、点 P_n の x 座標を x_n 、直線 $P_n P_{n+1}$ と曲線 C で囲まれた部分の面積を S_n とする。このとき次の問に答えよ。 (35 点)

- (1) x_1 を求めよ。
- (2) x_{n+1} を x_n の式で表せ。
- (3) x_n を n の式で表せ。
- (4) a, b を定数とすると、一般に次の等式が成り立つことを、左辺に部分積分法を用いることで、証明せよ。

$$\int_a^b (x-b)^2(x-a) dx = \frac{1}{12}(a-b)^4$$

- (5) S_n を n の式で表せ。

問題 **3** の解答は解答用紙に記入せよ。答だけでなく、答を導く過程も記入せよ。

3 座標空間において、原点 $(0, 0, 0)$ を中心とし、 xy 平面に含まれる半径 1 の円 C を考える。そして、 xy 平面の上側に、この円 C を底面とする高さ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ の直円柱 D を考える。また、点 $(-1, 0, 0)$ を通り、 y 軸に平行な直線を ℓ とする。直線 ℓ を含み、 xy 平面と 30° で交わる平面 α により、この直円柱 D が二つの部分に分けられているとする。このとき、これらの部分のうち、 α の下側の部分を M として次の間に答えよ。

(35 点)

- (1) 点 $(s, 0, 0)$ (ただし、 $-1 < s < 1$) を通り yz 平面に平行な平面と、 M との共通部分は長方形となるが、その面積を s を用いて表せ。
- (2) 立体 M の体積を求めよ。