

# A 2 数 学

この冊子は、数学の問題で 1 ページより 5 ページまであります。

## 〔注 意〕

- (1) 試験開始の指示があるまで、この冊子を開いてはいけません。
- (2) 受験番号等記入の指示があったら、直ちに解答用紙に志望学科・受験番号を記入しなさい。解答用マークシートには受験番号および氏名を記入し、さらに受験番号・志望学科をマークしなさい。
- (3) 解答は所定の解答用紙に記入したものおよび解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。
- (4) 解答用マークシートについて
  - ① 解答用マークシートは絶対に折り曲げてはいけません。
  - ② マークには黒鉛筆(HBまたはB)を使用しなさい。指定の黒鉛筆以外でマークした場合は採点されません。
  - ③ 誤ってマークした場合は消しゴムで丁寧に消し、消しくずを完全に取り除いた上、新たにマークし直しなさい。
  - ④ マークは横 1 行について 1 箇所に限ります。2 箇所以上マークすると採点されません。あいまいなマークは無効となるので、はっきりマークしなさい。
- (5) 試験開始の指示があったら、初めに問題冊子のページ数を確認しなさい。
- (6) 問題冊子は、試験終了後、持ち帰りなさい。

問題 **1** の解答は解答用マークシートにマークせよ。

**1** 座標平面上の領域  $D$  に関する次の条件  $p$  を考える：

$p$ : 「 $D$  内の点  $(x, y)$  で、 $x \neq 0$  かつ  $x^2 + y^2 > 1$  をみたすものが存在する」

このとき次の問に答えよ。

(20 点)

(1) 次の各命題について、 $D$  の取り方によらず、条件  $p$  を仮定すると必ず真となるか否かを判定せよ。それぞれの命題について、必ず真となる場合には、解答用マークシートの 1 をマークし、必ずしも真ではない場合には 0 をマークせよ。

(ア) 「点  $P(a, b)$  が  $a = 0$  または  $a^2 + b^2 \leq 1$  をみたせば、 $P$  は  $D$  内の点である」

(イ) 「点  $P(a, b)$  が  $a = 0$  または  $a^2 + b^2 \leq 1$  をみたせば、 $P$  は  $D$  内の点ではない」

(ウ) 「 $D$  内の点  $P(a, b)$  で、 $a \neq 0$  または  $a^2 + b^2 > 1$  をみたすものが存在する」

(エ) 「 $D$  内のすべての点  $P(a, b)$  は、 $a \neq 0$  かつ  $a^2 + b^2 > 1$  をみたす」

(オ) 「 $D$  内の点  $P(a, b)$  で、 $a^2 + b^2 > 1$  をみたすものが存在する」

(カ) 「 $D$  内には、点  $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$  以外の点が存在する」

(キ) 「点  $(1, 1)$  は  $D$  内の点である」

(ク) 「ある  $r > 1$  に対して、原点を中心とする半径  $r$  の円周と  $D$  は共通部分をもつ」

(ケ) 「原点を中心とする半径 1 の円周上のどの点も  $D$  内の点ではない」

(コ) 「 $D$  は、原点を中心とする半径 1 の円の内部に含まれていない」

(2) 次の各条件について、それが条件  $p$  の否定と同値になるか否かを判定せよ。それぞれの条件について、同値である場合には、解答用マークシートの 1 をマークし、同値ではない場合には 0 をマークせよ。

(ア) 「 $D$  内の点  $P(a, b)$  で、 $a = 0$  または  $a^2 + b^2 \leq 1$  をみたすものは存在しない」

(イ) 「 $D$  内の点  $P(a, b)$  で、 $a = 0$  または  $a^2 + b^2 \leq 1$  をみたすものが存在する」

(ウ) 「 $D$  内の点  $P(a, b)$  で、 $a \neq 0$  かつ  $a^2 + b^2 > 1$  をみたすものは存在しない」

(エ) 「 $D$  内のすべての点  $P(a, b)$  は、 $a = 0$  または  $a^2 + b^2 \leq 1$  をみたす」

(オ) 「 $D$  内のすべての点  $P(a, b)$  は、 $a = 0$  かつ  $a^2 + b^2 \leq 1$  をみたす」

問題 **2** の解答は解答用紙に記入せよ。答だけでなく、答を導く過程も記入せよ。

**2** 座標平面上の、原点  $O$  を中心とする半径  $1$  の円周上を、時刻  $t$  のときの位置が  $(\cos t^2, \sin t^2)$  となるように動く点  $P$  がある。このとき時刻  $t$  における  $P$  の速度ベクトルを  $\vec{v}$  として、 $\vec{OQ} = \vec{OP} + \vec{v}$  で動点  $Q$  を定める。 $t$  が負でない実数を動くときの動点  $Q$  の軌跡の一部は次ページの図のようになる。このとき次の問に答えよ。

(40 点)

- (1) 時刻  $t$  における点  $Q$  の座標を  $t$  の式で表せ。
- (2) 時刻  $t$  が  $t \geq 0$  の範囲を動くときの点  $Q$  の軌跡は自分自身と交わらないことを証明せよ。
- (3)  $t \geq 0$  の範囲で、点  $Q$  が  $x$  軸の正の部分上に来るときの時刻  $t$  の値を小さい順に

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < \cdots$$

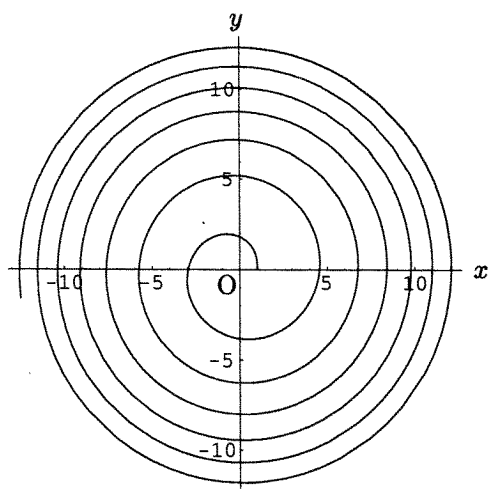
とする。

(a)  $\tan s$  のグラフと  $-2\sqrt{s}$  ( $s > 0$ ) のグラフを活用して、 $\lim_{n \rightarrow \infty} (t_{n+1}^2 - t_n^2)$  を求めよ。(ヒント:  $t_n$  の正確な値を求める必要はない。)

(b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_n}{\sqrt{n}}$  の値を求め、それを用いて

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (t_{n+1} - t_n) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

が成り立つことを示せ。



問題 **3** の解答は解答用紙に記入せよ。答だけでなく、答を導く過程も記入せよ。

**3**  $x$  の二つの関数

$$f(x) = \log_{\frac{1}{4}}(\sin^2 x) + \log_{\frac{1}{2}}(\sin x + \cos x),$$

$$g(x) = \log_2(\sin x) + \log_4(\cos x + 1)$$

について次の問に答えよ。

(40 点)

(1)  $0 < x < \pi$  の範囲で、 $f(x)$  が意味を持ちかつ不等式  $f(x) \leq 0$  が成り立つような  $x$  の範囲を求めよ。また、この範囲で  $f(x)$  が最小値を取る  $x$  の値  $x_0$  を求めよ。

(2)

(a)  $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  における  $g(x)$  の最大値と最小値を求めよ。

(b) 方程式  $g(x) = 0$  は  $\frac{\pi}{4} < x_1 < \frac{\pi}{2}$  をみたす解  $x_1$  を持つことを示せ。また、 $g(x)$  は  $\frac{\pi}{4} \leq x \leq x_1$  では単調増加、 $x_1 < x < \frac{\pi}{2}$  では正であることを示せ。(この結果、 $x_1$  は一つに定まる。)

(3) (1) で求めた  $x_0$  と (2) で定まる  $x_1$  について、 $\cos x_0$  と  $\cos x_1$  を比較することにより  $x_0$  と  $x_1$  の大小を決定せよ。