

B 1 数 学

この冊子は、数学の問題で 1 ページより 5 ページまであります。

〔注 意〕

- (1) 試験開始の指示があるまで、この冊子を開いてはいけません。
- (2) 受験番号等記入の指示があったら、直ちに解答用紙に志望学科・受験番号を記入しなさい。解答用マークシートには受験番号および氏名を記入し、さらに受験番号・志望学科をマークしなさい。
- (3) 解答は所定の解答用紙に記入したものおよび解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。
- (4) 解答用マークシートについて
 - ① 解答用マークシートは絶対に折り曲げてはいけません。
 - ② マークには黒鉛筆(HBまたはB)を使用しなさい。指定の黒鉛筆以外でマークした場合は採点されません。
 - ③ 誤ってマークした場合は消しゴムで丁寧に消し、消しくずを完全に取り除いた上、新たにマークし直しなさい。
 - ④ マークは横 1 行について 1 箇所に限ります。2 箇所以上マークすると採点されません。あいまいなマークは無効となるので、はっきりマークしなさい。
- (5) 試験開始の指示があったら、初めに問題冊子のページ数を確認しなさい。
- (6) 問題冊子は、試験終了後、持ち帰りなさい。

問題 1 の解答は解答用マークシートにマークせよ。

1 次の (1) から (3) において、 内のカタカナにあてはまる 0 から 9 までの数字を求めて、その数字を解答用マークシートにマークせよ。ただし、 は 1 桁の数、 は 2 桁の数を表す。また、分数は既約分数として表すものとする。

(35 点)

(1) 直線上に 4 点 G_1, A, B, G_2 が図のように左からこの順に間隔 1 で並んでいる。

いま、動点 P が点 A から出発して次の規則で移動する。

「サイコロを投げて、1 の目が出たら左に 1 だけ進み、そのほかの目が出たら右に 1 だけ進む。ただし、 G_1, G_2 をゴールとし、ゴールに到着した後はどの目が出ても移動しない。」

n 回サイコロを投げたときに P がゴールにいる確率を p_n とすると、

$$n \text{ が偶数のとき, } p_n = 1 - \left(\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}} \boxed{\text{ウ}}} \right)^{\frac{n}{\boxed{\text{エ}}}}$$

$$n \text{ が奇数のとき, } p_n = 1 - \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}} \left(\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}} \boxed{\text{ケ}}} \right)^{\frac{n - \boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}}$$

となる。



(2) a を実数とし、行列 X を $X = \begin{pmatrix} 2a+1 & -2a+1 \\ 8a-4 & -6a+5 \end{pmatrix}$ により定める。

また、 E を 2 次の単位行列とし、 O を 2 次の零行列とする。

(a) X を実数 k と行列 Y を用いて $X = kE + Y$ と表すとき、 $Y^2 = O$ となる
とすると、 $k = -\boxed{\text{シ}}a + \boxed{\text{ス}}$ であり、

$$Y = \begin{pmatrix} \boxed{\text{セ}}a - \boxed{\text{ソ}} & -2a+1 \\ 8a-4 & -\boxed{\text{タ}}a + \boxed{\text{チ}} \end{pmatrix}$$

である。

(b) 自然数 n に対し、 X^n を (a) で求めた Y を用いて表すと、

$$X^n = (-\boxed{\text{ツ}}a + \boxed{\text{テ}})^n E + n(-\boxed{\text{ト}}a + \boxed{\text{ナ}})^{n-1} Y$$

であり、とくに、 $a = 1$ のとき、

$$X^n = \begin{pmatrix} \boxed{\text{ニ}}n + \boxed{\text{ヌ}} & -\boxed{\text{ネ}}n \\ \boxed{\text{ノ}}n & -\boxed{\text{ハ}}n + \boxed{\text{ヒ}} \end{pmatrix}$$

となる。

- (3) 座標平面上で、点 $(1, 0)$ を中心とする半径 1 の円と放物線 $y = -\frac{2\sqrt{3}}{3}(x^2 - 2x)$ の交点の座標は、 x 座標の小さい順に

$$(0, 0), \left(\frac{\boxed{\text{フ}}}{\boxed{\text{ヘ}}}, \frac{\sqrt{\boxed{\text{ホ}}}}{\boxed{\text{マ}}} \right), \left(\frac{\boxed{\text{ミ}}}{\boxed{\text{ム}}}, \frac{\sqrt{\boxed{\text{メ}}}}{\boxed{\text{モ}}} \right), (\boxed{\text{ヤ}}, \boxed{\text{ユ}})$$

であり、また、この円の内側とこの放物線の上側の共通部分の面積は、

$$\frac{\pi}{\boxed{\text{ヨ}}} - \frac{\boxed{\text{ラ}} \boxed{\text{リ}}}{\boxed{\text{ル}} \boxed{\text{レ}}} \sqrt{\boxed{\text{ロ}}}$$

である。

問題 **2** の解答は解答用紙に記入せよ。答だけでなく、答を導く過程も記入せよ。

2 関数 $f(x) = e^{-x} \cos x$ ($x \geq 0$) について、次の問に答えよ。ただし、 e は自然対数の底を表す。 (25 点)

- (1) $f(x)$ の極値を与える x の値をすべて求めよ。
- (2) 区間 $[0, \pi]$ における $f(x)$ の 最大値および最小値と、それらを与える x の値を求めよ。ただし、 $[0, \pi]$ は、 $0 \leq x \leq \pi$ であるような実数 x 全体の集合を表す。
- (3) $f(x)$ の極小値を与える x の値を、小さい順に

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots \quad (0 < a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n < \dots)$$

とする。

(a) a_n を求めよ。

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} f(a_n)$ を求めよ。

問題 **3** の解答は解答用紙に記入せよ。答だけでなく、答を導く過程も記入せよ。

3 $\log t$ は t の自然対数を表し、 e は自然対数の底を表す。 (40 点)

(1) (a) $\int t^2(\log t)^2 dt$ を求めよ。

(b) $\int_1^e t^2(\log t)^2 dt$ を求めよ。

(c) $\int \log t dt$ を求めよ。

(d) $\int_1^e \log t dt$ を求めよ。

(2) 正の実数全体を定義域とする連続関数 $f(x)$ が、すべての正の実数 x に対して

$$f(x) = x^2 \log x - \int_1^e f(t) \log t dt$$

を満たしているとする。このとき、次の問に答えよ。

(a) $f(x)$ を求めよ。

(b) $f(x)$ の極値を与える x の値を求めよ。

(c) $y = f(x)$ のグラフの変曲点の x 座標を求めよ。