

# P 1 数 学

この冊子は、数学の問題で 1 ページより 5 ページまであります。

## 〔注 意〕

- (1) 試験開始の指示があるまで、この冊子を開いてはいけません。
- (2) 受験番号等記入の指示があったら、直ちに解答用紙に志望学科・受験番号を記入しなさい。解答用マークシートには受験番号および氏名を記入し、さらに受験番号・志望学科をマークしなさい。
- (3) 解答は所定の解答用紙に記入したものおよび解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。
- (4) 解答用マークシートについて
  - ① 解答用マークシートは絶対に折り曲げてはいけません。
  - ② マークには黒鉛筆(HBまたはB)を使用しなさい。指定の黒鉛筆以外でマークした場合は採点されません。
  - ③ 誤ってマークした場合は消しゴムで丁寧に消し、消しくずを完全に取り除いた上、新たにマークし直しなさい。
  - ④ マークは横 1 行について 1 箇所に限ります。2 箇所以上マークすると採点されません。あいまいなマークは無効となるので、はっきりマークしなさい。
- (5) 試験開始の指示があったら、初めに問題冊子のページ数を確認しなさい。
- (6) 問題冊子は、試験終了後、持ち帰りなさい。

問題 1 の解答は解答用マークシートにマークしなさい。

1 次の文章中の ア から ヒ までに当てはまる数字 0～9 を求めて、解答用マークシートの指定された欄にマークしなさい。ただし、分数は既約分数として表しなさい。

(40 点、ただし数学科は 60 点)

(1)  $x$  の整式  $A = x^3 + p(q-1)x^2 + 2pqx + p - 3q$  を  $x+1$  で割ると余りが 2 であり、 $x-1$  で割ると余りは 28 であるとする。

このとき、

$$p = -\text{ア}, \quad q = -\text{イ}$$

となる。

したがって、この整式  $A$  を  $(x-1)^2$  で割った余りは

$$\text{ウ} \times \text{エ} x - \text{オ}$$

となる。

右のページは白紙です。

(2) 数列  $\{a_n\}, \{b_n\}$  は以下の条件 (i),(ii) を満たしているとする。

(i)  $a_1 = \frac{3}{5}, \quad b_1 = \frac{1}{4} \int_0^1 x e^x dx$

(ii)  $f_n(x) = a_n \sqrt{x} + b_n$  とおくと

$$a_{n+1} = \frac{4}{5} f'_n(1), \quad b_{n+1} = \int_0^1 f_n(x) dx, \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

ただし、 $e$  は自然対数の底であり、 $f'_n(x)$  は  $f_n(x)$  の導関数である。このとき、

$b_1 = \frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$  であり、関係式

$$a_{n+1} = \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}} a_n, \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$b_{n+1} = b_n + \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}} a_n, \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

が成り立つ。したがって、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \boxed{\text{シ}}$ 、 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{\boxed{\text{ス}} \quad \boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}} \quad \boxed{\text{タ}}}$  である。

右のページは白紙です。

- (3) 1辺の長さが1の正四面体  $OABC$  において、線分  $OA$  の中点を  $P$ 、線分  $OB$  を  $1:2$  に内分する点を  $Q$  とする。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$  とするとき、ベクトル  $\overrightarrow{PQ}$  は

$$\overrightarrow{PQ} = -\frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}} \vec{a} + \frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}} \vec{b}$$

と表せ、 $\overrightarrow{PQ}$  の大きさは  $\frac{\sqrt{\boxed{\text{ナ}}}}{\boxed{\text{ニ}}}$  である。さらに線分  $PQ$  を  $t:1-t$  に内分する点を  $R$  とすると、 $t = \frac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}$  のとき  $\overrightarrow{PQ}$  と  $\overrightarrow{CR}$  が直交する。そのときの  $\overrightarrow{CR}$  の大きさは  $\frac{\sqrt{\boxed{\text{ノ}} \boxed{\text{ハ}}}}{\boxed{\text{ヒ}}}$  である。

右のページは白紙です。

問題 **2**, **3** の解答は解答用紙に記入しなさい。

**2** 絶対値が 1 の複素数  $z$  を  $z = \cos \theta + i \sin \theta$  とする。このとき複素数平面上の 3 点  $1, z, z^3$  をそれぞれ  $P, Q, R$  とする。

- (1) 線分  $PQ$  の長さの 2 乗を  $\cos \theta$  を用いて表せ。
- (2) 線分  $PQ, QR, RP$  の長さの 2 乗の和を  $L$  とする。 $\cos \theta = t$  とおき、 $t$  を用いて  $L$  を表せ。
- (3)  $t$  が  $-1 \leq t \leq 1$  の範囲を動くとき、(2) の  $L$  が最大となる  $t$  の値を求めよ。
- (4)  $\theta$  が  $0 \leq \theta \leq \pi$  の範囲を動くとき、(2) の  $L$  が最大となる  $\theta$  は、 $\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{2}$  の範囲にあることを示せ。

(30 点、ただし数学科は 45 点)

右のページは白紙です。

**3**実数  $a, b$  ( $a < b$ ) に対して

$$f(x) = \log |1 + (x - a)(b - x)|$$

とおく。ただし、対数は自然対数である。

(1)  $t = b - a$  とおく。  $a, b$  が変化しても、  $t$  が一定ならば、積分  $\int_a^b f(x) dx$  の値は一定であることを示せ。

(2)  $x \geq 0$  に対して、不等式

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \log(1 + x) \leq x$$

が成り立つことを示せ。

(3)  $t = b - a$  とし、  $S(t) = \int_a^b f(x) dx$  とおく。このとき、  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{S(t)}{t^3}$  を求めよ。

(30 点、ただし数学科は 45 点)

右のページは白紙です。