

11

(1) (a) $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} a+bs & a+bt \\ b+as & b+at \end{pmatrix}$
 $P \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & a-b \\ s(a+b) & t(a-b) \end{pmatrix}$
 $\therefore \begin{cases} a+bs = a+b \Leftrightarrow b(s-1)=0 \\ b \neq 0 \text{ より } s=1 \quad \underline{\text{ア}}-1 \end{cases}$
 $\begin{cases} a+bt = a-b \Leftrightarrow b(t+1)=0 \\ b \neq 0 \text{ より } t=-1 \quad \underline{\text{イ}}-1 \end{cases}$
 $P^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ 対称で、
ア-1 イ-2 ウ-1 エ-2 コ-1 ク-2
カ-1 キ-2

(b) $\begin{pmatrix} 34 & 18 \\ 18 & 34 \end{pmatrix}$ の固有方程式 $t^2 - (34+34)t + (34^2-18^2) = 0$
 をとくと、固有値は 16 と 52 固有ベクトルは
 $\lambda=16$ とき $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ と $\lambda=52$ とき $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ として、
 $\begin{pmatrix} 34 & 18 \\ 18 & 34 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 16^n \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
 $\begin{pmatrix} 34 & 18 \\ 18 & 34 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 52^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
 $\therefore \begin{cases} e-f = -16^n \\ e+f = 52^n \end{cases}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} 2e = 52^n - 16^n \\ 2f = 52^n + 16^n \end{cases}$
ア-5 イ-2 ウ-1 エ-6
コ-5 ク-2 カ-1 キ-6

(2) $B^5 - 1 = 0 \quad \underline{\text{ア}}-5$
 $B^5 - 1 = (B-1)(B^4+B^3+B^2+B+1) = 0$
 $B \neq 1 \text{ より } B^4+B^3+B^2+B+1=0 \quad \underline{\text{イ}}-1$
 両辺を B^2 で割ると、 $B^2+B+1+\frac{1}{B}+\frac{1}{B^2}=0 \quad \underline{\text{ウ}}-1$
 $(B+\frac{1}{B})^2 - 2 + (B+\frac{1}{B}) + 1 = 0$
 $(B+\frac{1}{B})^2 + (B+\frac{1}{B}) - 1 = 0 \quad \underline{\text{エ}}-1$
 $\frac{1}{B} = \cos(-\frac{2\pi}{5}) + i \sin(-\frac{2\pi}{5}) = \cos \frac{2\pi}{5} - i \sin \frac{2\pi}{5}$
ア-1 イ-1
 $(B+\frac{1}{B})^2 + (B+\frac{1}{B}) - 1 = 0 \quad B+\frac{1}{B}$ は正の実数より
 $\Leftrightarrow B+\frac{1}{B} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$
ア-1 イ-5 ウ-2
 $B+\frac{1}{B} = 2\cos \frac{2\pi}{5} \text{ より } \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$
ア-1 イ-5 ウ-4

(3) 三辺の長さが等しいことを利用して、
 $(2u)^2 = u^2 + (b-v)^2$
 $\therefore 4u^2 = u^2 + (b-v)^2 \quad \underline{\text{ア}}-4$
 $u^2 = a^2 - \frac{a^2}{b^2}v^2$ を代入して、
 $(1+\frac{3a^2}{b^2})v^2 - 2bv + b^2 - 3a^2 = 0$
 $-b < v < b$ より $v = \frac{-3a^2b + b^3}{3a^2 + b^2}$
 $u = \frac{2\sqrt{3}a^2b}{3a^2 + b^2}$
ア-3 イ-2 ウ-1
エ-3 コ-3 ク-1
カ-2 キ-3 ク-2 ケ-1
コ-3

正三角形の3頂点は
 $(-u', v') (u', v') (0, -b)$
 と仮定すると、
 $\begin{cases} \frac{u'^2}{a^2} + \frac{v'^2}{b^2} = 1 \\ 4u'^2 = u'^2 + (-b-v')^2 \end{cases}$
 $v' = \frac{3a^2b - b^3}{3a^2 + b^2} \quad \underline{\text{ア}}-3 \underline{\text{イ}}-2 \underline{\text{ウ}}-1 \underline{\text{エ}}-3$
 $u' = \frac{2\sqrt{3}a^2b}{3a^2 + b^2} \quad \underline{\text{ア}}-3 \underline{\text{イ}}-1$
ア-2 イ-3 ウ-2 ケ-1

2

(1) $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ を両辺 x で微分すると,

$$2(x-a) + 2(y-b) \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{a-x}{y-b} \quad \text{よって } P(t, u) \text{ における } \frac{dy}{dx} \text{ は}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a-t}{u-b}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= -\frac{a-x}{(y-b)^2} \cdot \frac{dy}{dx} - \frac{1}{y-b} \\ &= \frac{-(x-a)^2 - (y-b)^2}{(y-b)^3} \quad \text{より} \end{aligned}$$

$$\text{よって } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-(t-a)^2 - (u-b)^2}{(u-b)^3}$$

(2) $f'(t) = e^t$
 $f''(t) = e^t$ より,

$$\begin{cases} \frac{a-t}{e^t-b} = e^t & \text{--- ①} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{-(t-a)^2 - (e^t-b)^2}{(e^t-b)^3} = e^t & \text{--- ②} \end{cases}$$

① $\Leftrightarrow a-t = e^t(e^t-b)$ を②に代入して,

$$b = \frac{2e^{2t}+1}{e^t} = 2e^t + \frac{1}{e^t}$$

$$a = -e^{2t} + t - 1$$

$$r = \sqrt{(t-a)^2 + (e^t-b)^2} = (e^{2t}+1) \sqrt{1 + \frac{1}{e^{2t}}}$$

(3) $\frac{dr}{dt} = \frac{2e^{4t} + e^{2t} - 1}{e^{2t} \sqrt{1 + \frac{1}{e^{2t}}}} = \frac{(e^{2t}+1)(2e^{2t}-1)}{e^{2t} \sqrt{1 + \frac{1}{e^{2t}}}}$
 分母正より, 増減は 下より,

t	$\frac{dr}{dt}$	$-\frac{\log 2}{2}$	
$\frac{dr}{dt}$	-	0	+
r	$\searrow$		$\nearrow$

r を最大にする t は

$$t = -\frac{\log 2}{2}$$

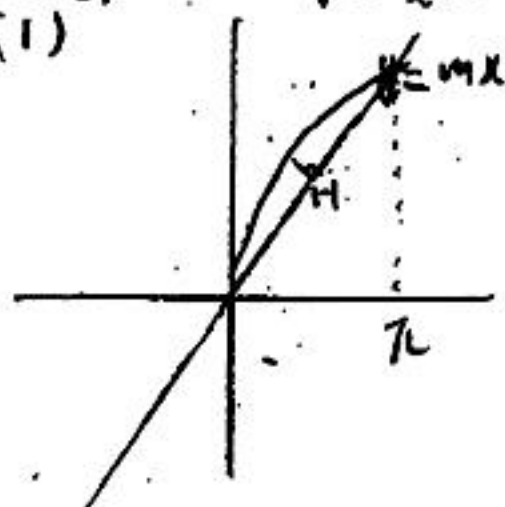
その時の r は

$$r = \frac{3}{2} \sqrt{3}$$

3

(1)

$y = mx + \sin x$ (a) PHの長さとは、Pと l_m の距離)



たのて

$$PH = \frac{|mt - (mt + \sin t)|}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

$0 \leq t \leq \pi$ より $\sin t \geq 0$ かつ、

$$PH = \frac{\sin t}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

(b) Pを通り l_m に垂直な線は

$y = -\frac{1}{m}(x - t) + mt + \sin t$ と表せるので、

Hのx座標は、 $t + \frac{m}{m^2 + 1} \sin t$ とする。

よってOHの長さはHのx座標に $\sqrt{m^2 + 1}$ をかけたものなり、

$$OH = t\sqrt{m^2 + 1} + \frac{m}{\sqrt{m^2 + 1}} \sin t$$

(2)

$$\begin{aligned} V_m &= \int_0^\pi \left(\frac{\sin t}{\sqrt{m^2 + 1}} \right)^2 \pi \cdot \left(\sqrt{m^2 + 1} + \frac{m}{\sqrt{m^2 + 1}} \cos t \right) dt \\ &= \pi \left[\frac{t - \frac{1}{2} \sin 2t}{2\sqrt{m^2 + 1}} + \frac{1}{3} \frac{m}{(m^2 + 1)\sqrt{m^2 + 1}} \sin^3 t \right]_0^\pi \\ &= \pi \left(\frac{\pi}{2\sqrt{m^2 + 1}} \right) = \frac{\pi^2}{2\sqrt{m^2 + 1}} \end{aligned}$$

$$(3) \lim_{m \rightarrow \infty} m^2 (V_m - V_{m+1}) = \lim_{m \rightarrow \infty} m^2 \left(\frac{\pi^2}{2\sqrt{m^2 + 1}} - \frac{\pi^2}{2\sqrt{(m+1)^2 + 1}} \right)$$

$$f(m) = \frac{\pi^2}{2\sqrt{m^2 + 1}} \text{ とすると、 } f'(m) = -\frac{m\pi^2}{2(m^2 + 1)^{3/2}} \text{ であり、}$$

$$f''(m) = \left(\frac{-2m^2 + 1}{(m^2 + 1)^{5/2}} \right) \left(-\frac{\pi^2}{2} \right) \text{ であり、 } m \rightarrow \infty \text{ において、 } f''(m) > 0 \text{ より、}$$

$$-f'(m+1) \sqrt{V_m - V_{m+1}} < -f'(m)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(m+1)\pi^2}{2((m+1)^2 + 1)^{3/2}} \sqrt{V_m - V_{m+1}} < \frac{m\pi^2}{2(m^2 + 1)^{3/2}}$$

$$\text{よって、はさみうちの定理より、} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m^2(m+1)\pi^2}{2((m+1)^2 + 1)^{3/2}} < \lim_{m \rightarrow \infty} m^2(V_m - V_{m+1}) < \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m^3\pi^2}{2(m^2 + 1)^{3/2}}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m^2(m+1)\pi^2}{2((m+1)^2 + 1)^{3/2}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(1 + \frac{1}{m})\pi^2}{2((1 + \frac{1}{m})^2 + \frac{1}{m^2})^{3/2}} = \frac{\pi^2}{2}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m^3\pi^2}{2(m^2 + 1)^{3/2}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\pi^2}{2(1 + \frac{1}{m^2})^{3/2}} = \frac{\pi^2}{2}$$

$$\text{よって、} \lim_{m \rightarrow \infty} m^2(V_m - V_{m+1}) = \frac{\pi^2}{2}$$

$$\text{よって } \frac{\pi^2}{2}$$