

大問 1

ア 1 イ 3 ウ 1 エ 6 オ 9 カ 1 キ 6 ク 1 ケ 4 コ 3
 サ 7 シ 9 ス 1 セ 6 ソ 4 タ 7 チ 4 ツ 2 テ 2 ト 1
 ナ 1 ニ 6 ヌ 1 ネ 2 ノ 2 ハ 3 ヒ 5 フ 6 ヘ 1 ホ 3
 マ 6 ミ 3 ム 2 メ 1 モ 3 ヤ 8 ュ 2 ヨ 1 ラ 4 リ 6
 ル 4

$$(1) \quad g(x)h(x) = acx^2 + (ad+bc)x + bd \\ = ac(x^2+x-3) + (ad+bc-ac)x + (bd+3ac)$$

$$\text{よ}, p = ad+bc-ac, q = bd+3ac$$

$$(2) \quad A = \begin{pmatrix} b-a & a \\ 3a & b \end{pmatrix}$$

$$(3) \quad \det A = 0, \text{つまり } b^2 - ab - 3a^2 = 0 \text{ が必要十分であることを示す.}$$

$$g(x)h(x) \text{ が } x^2+x-3 \text{ で割り切れる} \Leftrightarrow p=q=0 \text{ である}$$

$$(\text{必要性}) \quad \det A \neq 0 \text{ とすると, } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \text{ の両辺に左から } A^{-1} \text{ をかけると, } \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ よ}, h(x) = 0 \text{ 以外に存在しない.}$$

$$(\text{十分性}) \quad a=b=0 \text{ のとき } h(x) (\neq 0) \text{ は任意にとれる.}$$

$$\cdot \text{ それ以外のとき, } h(x) = ax - (b-a) \text{ とすればよい.}$$

$$(4) \quad (2) \text{ より, } \begin{pmatrix} \alpha_{n+1} \\ \beta_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix} \text{ が成立する. これをくり返し用いる.}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix} = A^{n-1} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = A^{n-1} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = A^{n-1} A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$(5) \quad a=2, b=1 \text{ とし, } \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 13 \end{pmatrix} \text{ に注意する.}$$

$$n \text{ が偶数 } 2k \text{ のとき, } \begin{pmatrix} \alpha_{2k} \\ \beta_{2k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}^{2k} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 13 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 13^k & 0 \\ 0 & 13^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 13^k \end{pmatrix}$$

$$\text{よ}, \text{余りは } 13^k = \underline{13^{\frac{n}{2}}}$$

$$n \text{ が奇数 } 2k+1 \text{ のとき } \begin{pmatrix} \alpha_{2k+1} \\ \beta_{2k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}^{2k} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 13^k & 0 \\ 0 & 13^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 13^k \\ 13^k \end{pmatrix}$$

$$\text{よ}, \text{余りは } 2 \cdot 13^k x + 13^k = \underline{2 \cdot 13^{\frac{n-1}{2}} x + 13^{\frac{n-1}{2}}}$$

(1) $y' = -\frac{1}{x^2} < 0$, ℓ の方程式は, $y = -\frac{1}{a^2}(x-a) + \frac{1}{a}$.

つまり, $y = -\frac{1}{a^2}x + \frac{2}{a}$. $x = k, k+1$ を代入して,

$q = -\frac{1}{a^2}k + \frac{2}{a}, r = -\frac{1}{a^2}(k+1) + \frac{2}{a}$.

(2) S_a は台形の面積で,

$$S_a = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (q+r) = \frac{1}{2} \left(-\frac{2k+1}{a^2} + \frac{4}{a} \right).$$

$$S'_a = \frac{1}{2} \left(\frac{2(2k+1)}{a^3} - \frac{4}{a^2} \right) = \frac{(2k+1) - 2a}{a^3}$$

よって, S'_a の符号は, $a = k + \frac{1}{2}$ の前後で正から負に変わる.

よって, $a = k + \frac{1}{2}$ で最大値をとり, その値は,

$$S_{k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left(-\frac{4}{2k+1} + \frac{8}{2k+1} \right) = \frac{2}{2k+1}.$$

(3) $y = \frac{1}{x}$ のグラフは下に凸である, そのグラフは, ℓ の上側にある.

よって, 任意の自然数 k について, $\log \frac{k+1}{k} = \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} > \frac{2}{2k+1}$.

が成立する. $k = 1, 2, \dots, n$ としたくあわせると,

示すべき式を得る.

