

$$(1)(a) \int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C.$$

$$\text{よって, } \int (x \cos x - \sin x) dx = \underline{x \sin x + 2 \cos x + C} \quad (C: \text{積分定数})$$

$$(b) f(x) = x \cos x - \sin x \text{ とすると, } f'(x) = -x \sin x \leq 0 \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

よって, $f(x)$ は単調減少 $(-\pi < x < \pi$ で $f'(x) = 0$ となるのは $x = 0$ のみ),

また, $f(0) = 0$ より, $f(x) = 0$ とする x は存在する。よって, 1個

(c) 最小値は, $f(x) = 0$ とする x が存在するから, $x = 0$ のときの 0

最大値は, $|f(\pi)|, |f(-\pi)|$ の大きい方だが, x は $\pm\pi$ にとりあえず

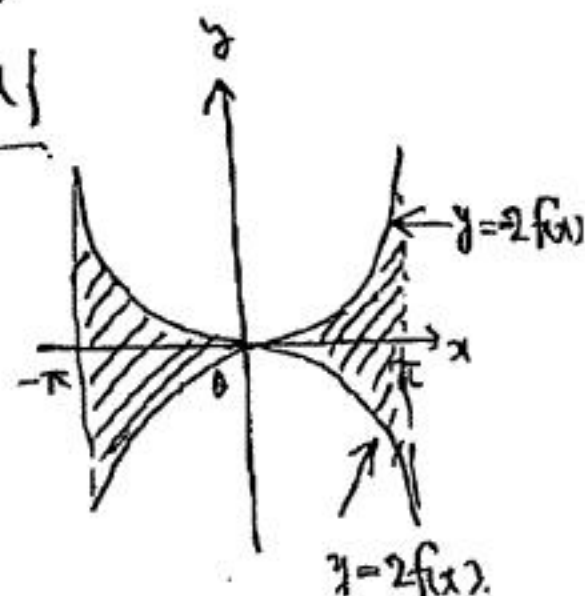
$x = \pm\pi$ のときの π

$$(2)(a) f(x) = 0 \text{ の判別式 } D = y^2 - 4(x \cos x - \sin x)^2 < 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{|y| < 2|x \cos x - \sin x|}$$

(b). S は右図の斜線部で, その面積は,

$$8 \int_0^{\pi} f(x) dx = -8 \left[x \sin x + 2 \cos x \right]_0^{\pi} = \underline{32}$$



$$(c) \text{ 虚数解は, } z = -\frac{y}{2} \pm \frac{\sqrt{4(x \cos x - \sin x)^2 - y^2}}{2} i$$

$$A = -\frac{y}{2}, B = \pm \frac{\sqrt{4(x \cos x - \sin x)^2 - y^2}}{2} \text{ とすると, } A^2 + B^2 = (f(x))^2.$$

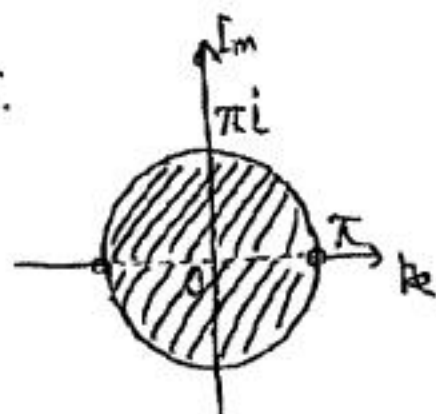
つまり, x を固定すると, z は $|z| = |f(x)|$ 上を動く。

$0 \leq |y| < 2|f(x)|$ より, $0 < |B| \leq |f(x)|$. つまり, 実軸上は除く。

次に, x を動かすと, (1)(c) より, $|f(x)|$ は $0 \leq |f(x)| \leq \pi$

を動くので, 求める領域は右図

(円板 $|z| \leq \pi$ の実軸以外の部分)。



$$(1) \quad 2x \leq 2x+y+z=4 \text{ より, } x=0, 1, 2$$

$x=0, 1, 2$ のときそれぞれ $y+z=4, 2, 0$ であり, y, z はそれぞれ $5, 3, 1$ 組あった. よって, $a_4 = 5+3+1 = \underline{9}$.

$$(2) \quad 2x \leq 2x+y+z=n \text{ より, } 0 \leq x \leq \left[\frac{n}{2} \right], \quad ([\] \text{ はガウス記号}).$$

$x=k$ のとき, $y+z=n-2k$ より, y, z は $n-2k+1$ 通り.

$$\therefore a_n = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2} \right]} (n-2k+1) = \frac{1}{2} \left(\left[\frac{n}{2} \right] + 1 \right) \left((n+1) + (n+1-2\left[\frac{n}{2} \right]) \right).$$

$$n \text{ が偶数のとき, } \left[\frac{n}{2} \right] = \frac{n}{2} \text{ より, } a_n = \frac{1}{2} \left(\frac{n}{2} + 1 \right) (n+2) = \underline{\underline{\frac{1}{4}(n+2)^2}}$$

$$n \text{ が奇数のとき, } \left[\frac{n}{2} \right] = \frac{n-1}{2} \text{ より,}$$

$$a_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{2} \cdot (n+3) = \underline{\underline{\frac{1}{4}(n+1)(n+3)}}$$

$$(3) \quad \text{求めるものは } \sum_{k=0}^{2n} a_k \text{ である.}$$

$$n \text{ が偶数 } 2m \text{ とすると, } a_{2m} = (m+1)^2,$$

$$n \text{ が奇数 } 2m-1 \text{ とすると, } a_{2m-1} = m(m+1)$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=0}^{2n} a_k &= \sum_{m=0}^n a_{2m} + \sum_{m=1}^n a_{2m-1} = \sum_{m=0}^n (m+1)^2 + \sum_{m=1}^n \frac{1}{3} (m(m+1)(m+2) - (m-1)m(m+1)) \\ &= \frac{1}{6} (n+1)(n+2)(2n+3) + \frac{1}{3} n(n+1)(n+2) = \underline{\underline{\frac{1}{6} (n+1)(n+2)(4n+3)}} \end{aligned}$$