

1

- (1) ア : 2
 イ : 9
 ウ : 4
 エ : 5
 オ : 2
 カ : 1
 キ : 5
 ク : 4
 ケ : 5
- (2) (a) ア : 0
 イ : 0
 ウ : 0
 エ : 4
 オ : 5
 カ : 4
 キ : 1
 ク : 2
 ケ : 4
 コ : 3
 サ : 2
 シ : 5
 ス : 0
 セ : 1
 ソ : 5
- (b)
- (3) ア : 5
 イ : 2
 ウ : 5
 エ : 2
 オ : 1
 カ : 1
 キ : 5

(1) $y = \frac{1}{2} \frac{\log x}{x^2}$ なので、

$$y' = \frac{\frac{1}{x^2} - 2x \log x}{2} = \frac{1}{2} \frac{1 - 2 \log x}{x^3} \dots \text{(答)}$$

- (2) 円と放物線の交点は $(\pm 2, 2)$ である。よって領域のうち、放物線と x 軸の $x \geq 0$ の部分で囲まれる面積は

・ $0 \leq x \leq 2$ の部分は、放物線が囲んでいて

$$\int_0^2 \frac{x^2}{2} dx = \frac{4}{3}$$

・ $2 \leq x$ の部分は、中心角 45° の扇形から直角三角形を除いたもので、面積 $\pi - 2$

なので加えて、(その面積) $= \pi - \frac{2}{3}$

従って、放物線で分けられる 2 つの部分の面積は、

○大きい方の面積は、この 2 倍に $y \leq 0$ の半円を足し

$$2 \times \left(\pi - \frac{2}{3} \right) + 4\pi = 6\pi - \frac{4}{3} \dots \text{(答)}$$

○小さい方の面積は、円全体から上を引いて、

$$8\pi - \left(6\pi - \frac{4}{3} \right) = 2\pi + \frac{4}{3} \dots \text{(答)}$$

$$\begin{aligned}
 (1) \quad f'(x) &= -(4-3x^2) - 6x\left(\alpha - \frac{1}{\alpha} - x\right) \\
 &= 9x^2 - 6\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)x - 4 = (3x-2\alpha)\left(3x+\frac{2}{\alpha}\right)
 \end{aligned}$$

で、 $\alpha > 0$ なので、 $-\frac{2}{3\alpha} < (0 <) \frac{2\alpha}{3}$ であるから増減表は下のよう。

x		$-\frac{2}{3\alpha}$		$\frac{2\alpha}{3}$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	増	(極大)	減	(極小)	増

上の表から、 $p = -\frac{2}{3\alpha}, q = \frac{2\alpha}{3} \dots$ (答)

$$\begin{aligned}
 (2) \quad (1)より、q-p &= \frac{2\alpha}{3} + \frac{2}{3\alpha} \geq 2\sqrt{\frac{2\alpha}{3} \cdot \frac{2}{3\alpha}} = \frac{4}{3} \\
 &[\frac{2\alpha}{3}, \frac{2}{3\alpha} > 0 \text{ に相加・相乗平均の不等式を用いた}]
 \end{aligned}$$

であり、この等号は $\frac{2\alpha}{3} = \frac{2}{3\alpha}$

$\therefore \alpha = 1$ のときに成立するので、

$q-p$ の最小値は $\frac{4}{3} (\alpha = 1 \text{ のとき}) \dots$ (答)

$$\begin{aligned}
 (3) \quad f(q) - f(p) &= \int_p^q f'(x) dx \\
 &= \int_p^q 3(x-p) \cdot 3(x-q) dx \\
 &= -\frac{9}{6} (q-p)^3 \\
 &\text{であり、(1)の結果を代入して} \\
 f(q) - f(p) &= -\frac{3}{2} \left(\frac{2\alpha}{3} + \frac{2}{3\alpha} \right)^3 \\
 &= -\frac{4}{9} \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right)^3 \dots \text{(答)}
 \end{aligned}$$

(4) $\alpha > 0$ のもとで、条件は

$$\begin{aligned}
 \frac{f(q) - f(p)}{q-p} &= -3 \Leftrightarrow \frac{-\frac{4}{9} \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right)^3}{\frac{2}{3} \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right)} = -3 \\
 &\Leftrightarrow \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right)^2 = \frac{9}{2} \\
 &\Leftrightarrow \alpha + \frac{1}{\alpha} = \frac{3}{\sqrt{2}} \\
 &\Leftrightarrow \alpha^2 - \frac{3}{\sqrt{2}} \alpha + 1 = 0 \\
 &\left(\alpha - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left(\alpha - \sqrt{2} \right) = 0
 \end{aligned}$$

で、 α は確かに正である。従って求める α の値は

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2} \dots \text{(答)}$$