

- (1) (a) ア : 3
 p : — イ : 2
 ウ : 2
 (b) エ : 3
 オ : 1
 (c) カ : 2
 キ : 1
 ク : 1
 ケ : 2
- (2) (a) ア : 1
 イ : 3
 ウ : 1
 エ : 6
 オ : 1
 カ : 9
 (b) キ : 4
 ク : 2
 ケ : 7
 コ : 4
 サ : 2
 シ : 7
 (c) ス : 8
 セ : 8
 ソ : 1
- (3) (a) ア : 1
 イ : 2
 ウ : 7
 (b) エ : 2
 オ : 3
 カ : 1
 (c) キ : 1
 ク : 4
 ケ : 1
 コ : 3
 サ : 1
 シ : 4
 ス : 1
 セ : 3

- (1) $t = \sqrt[3]{x}$ と置換すると、 $x = t^3$ より $dx = 3t^2 dt$ なので、
 $\int e^{\sqrt[3]{x}} dx = \int e^t \cdot 3t^2 dt$ である。

部分積分により、(右辺) $= (3t^2 - 6t + 6)e^t + C$ であるから、
 x に戻して、

$$\int e^{\sqrt[3]{x}} dx = \frac{(3\sqrt[3]{x^2} - 6\sqrt[3]{x} + 6)e^{\sqrt[3]{x}} + C}{\text{(ただし、} C \text{は積分定数)}} \quad \dots \text{(答)}$$

- (2)(a) 成分計算により、条件は

$$\begin{pmatrix} p+2q & 2p+q \\ r+s & 2r+s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p+2r & q+2s \\ 2p+r & 2q+s \end{pmatrix}$$

であり、したがって $\begin{cases} r=q \\ s=p \end{cases} \dots \text{(答)}$ が必要十分。

(b) $A = \begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix}$ とかけるので、 $A^2 = \begin{pmatrix} p^2 + q^2 & 2pq \\ 2pq & p^2 + q^2 \end{pmatrix}$

である。よって、

$$A^2 = A \Leftrightarrow \begin{cases} p^2 + q^2 = p \dots \text{①} \\ 2pq = q \dots \text{②} \end{cases} \quad \text{である。}$$

②より $p = \frac{1}{2}$ または $q = 0$ で、①から結局

$$(p, q) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), (1, 0), (0, 0)$$

と決定する。以上より

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \dots \text{(答)}$$

- (1) 交点では $y = x + m$ より、 x 座標と交点は 1 対 1 対応する。従って、2 式から y を代入・消去してできる x の方程式

$$x^2 + \frac{(x+m)^2}{3} = 1$$

$$\therefore 4x^2 + 2mx + (m^2 - 3) = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

が相異なる 2 実解をもつ、のが条件である。

よって判別式を考えて

$$m^2 - 4(m^2 - 3) > 0$$

$$\Leftrightarrow -2 < m < 2 \cdots (\text{答}) \text{ が求める範囲である。}$$

- (2) AB を求める。 x 座標の差は、①の 2 解の差なので

$$2 \times \frac{\sqrt{m^2 - 4(m^2 - 3)}}{4} = \frac{\sqrt{3(4 - m^2)}}{2} \quad \text{となる。}$$

あとは傾きが 1 なので、

$$AB = \frac{\sqrt{3(4 - m^2)}}{2} \times \sqrt{2} \quad \text{である。}$$

そして、AB を底面と見たときの高さ = O と L の距離 は $\frac{|m|}{\sqrt{2}}$ であるから、

$$\begin{aligned} (\triangle OAB \text{ の面積}) &= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}\sqrt{3(4 - m^2)}}{2} \times \frac{|m|}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{3m^2(4 - m^2)}}{4} \cdots (\text{答}) \end{aligned}$$

[ただし、 $m=0$ では面積 0 とした。]

となる。

$$\text{この結果は変形して、} \frac{\sqrt{3}\sqrt{4 - (m^2 - 2)^2}}{4} \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

となり、等号は $m = \pm\sqrt{2}$ で確かに成立するので

$$(\triangle OAB \text{ の面積の最大値}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdots (\text{答})$$

- (3) 直線 $y=x$ に関し対称な 2 点は $(s, t), (t, s)$ とおける。ともに C 上にある条件は

$$\begin{cases} s^2 + \frac{t^2}{3} = 1 \\ t^2 + \frac{s^2}{3} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow s^2 = t^2 = \frac{3}{4}$$

で、異なる 2 点になるのは

$$\underline{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdots (\text{答})}$$

- (4) L に関して対称な 2 点は $(m+s, t), (m+t, s)$ とおける。ともに C 上にある条件は

$$\begin{cases} (m+s)^2 + \frac{t^2}{3} = 1 \cdots \textcircled{2} \\ (m+t)^2 + \frac{s^2}{3} = 1 \cdots \textcircled{3} \end{cases} \quad \text{なので、}$$

「②と③を満たす異なる s, t が存在する」のが条件。
ここで、 $s \neq t$ のもとで

$$\begin{aligned} \begin{cases} \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \textcircled{2} - \textcircled{3} \\ \textcircled{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}(s-t)(s+t+3m) = 0 \\ \textcircled{2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} s+t+3m = 0 \\ \textcircled{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -s-3m \\ m^2 + 2ms + s^2 + \frac{(3m-s)^2}{3} = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} t = -s-3m \\ 4s^2 + 12ms + 3(4m^2 - 1) = 0 \cdots \textcircled{4} \end{cases} \end{aligned}$$

である。従って条件は

$$\textcircled{4} \text{ が } s = -\frac{3m}{2} \cdots \textcircled{5} \text{ 以外の実数解をもつ}$$

ことであり、重解のときが⑤と対応しているので、結局

求める条件 $\Leftrightarrow$ ④の判別式が正

$$\Leftrightarrow (6m)^2 - 4 \cdot 3(4m^2 - 1) > 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 1 < 0$$

$$\Leftrightarrow -1 < m < 1 \cdots (\text{答})$$

で、これが求める範囲である。