

1

(1)

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク
4	2	8	4	2	0	2	4

(2)

ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ
3	8	7	2	6	4	5	2	5	2	0

(3)

ト	ナ	ニ	ヌ	ネ	ノ	ハ	ヒ	フ
2	4	5	4	3	2	6	5	2
ヘ	ホ	マ	ミ	ム	メ	モ	ヤ	ユ
5	3	4	9	2	3	4	5	8

(1) $g(x)$ は

$$g(x) = \begin{cases} 1 & (x \geq t) \\ \frac{x}{t} & (x < t) \end{cases}$$

という形にすることができる. 従って,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^t \frac{x}{t}(x^2 - k^2)dx + \int_t^1 (x^2 - k^2)dx \\ &= \frac{1}{t} \left(\frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{2}k^2t^2 \right) + \frac{1}{3} - k^2 - \left(\frac{1}{3}t^3 - k^2t \right) \\ &= -\frac{1}{12}t^3 + \frac{1}{2}k^2t + \frac{1}{3} - k^2 \cdots (\text{答}) \end{aligned}$$

(2) I を k を固定して t の関数とみて, $I = f(t)$ とおく. すると,

$$f'(t) = -\frac{1}{4}t^2 + \frac{k^2}{2}$$

であるから, $f'(t) = 0$ となるのは, t が実数全体を動くとするれば, $t = \pm\sqrt{2}k$ のときである. 従って増減表は以下 (別ページ参照) のようになる. 従って, $0 < \sqrt{2}k \leq 1$ つまり, $0 < k \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ のときは,

$$M = f(\sqrt{2}k) = \frac{\sqrt{2}}{3}k^3 - k^2 + \frac{1}{3}$$

であり, $\frac{\sqrt{2}}{2} < k \leq 1$ のときは,

$$M = f(1) = -\frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{4}$$

である.

(3) $M = g(k)$ とおく. $0 < k \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ のときは,

$$g'(k) = \sqrt{2}k^2 - 2k < 0$$

なので, この範囲で, $g(k)$ は単調減少する. 一方, $\frac{\sqrt{2}}{2} < k \leq 1$ のときも, $g(k)$ は単調減少する. 従って, $g(k)$ は $0 < k \leq 1$ の範囲で単調減少するので, 求める範囲は $g(1) \leq M < g(0)$ つまり,

$$-\frac{1}{4} \leq M < \frac{1}{3}$$

である.

(1)

$$\begin{aligned}
 2 \int_0^x f_{n-1}(t) dt &= 2 \int_0^x \left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{2^i}{i!} x^i \right) \\
 &= 2 \sum_{i=0}^{n-1} \frac{2^i}{(i+1)!} x^{i+1} \\
 &= \sum_{i=1}^n \frac{2^i}{i!} x^i \\
 &= f_n(x) - 1
 \end{aligned}$$

であるから,

$$f_n(x) - \int_0^x f_{n-1}(t) dt = 1 \cdots (\text{答})$$

である.

(2) 与えられた等式の左辺を計算すると,

$$\begin{aligned}
 2 \int_0^x g(t) dt + 1 &= 2a \int_0^x e^{bt} dt + 1 \\
 &= \frac{2a}{b} (e^{bx} - 1) + 1
 \end{aligned}$$

であるから,

$$\frac{2a}{b} (e^{bx} - 1) + 1 = a e^{bx}$$

を得る. これが任意の x について成立するためには,

$$\begin{cases} \frac{2a}{b} = a \\ 1 - \frac{2a}{b} = 0 \end{cases}$$

であればよい. これより, $(a, b) = (1, 2) \cdots (\text{答})$ を得る.

(3)(2) の式から, (1) の結果を辺々引くことによって,

$$h_n(x) = 2 \int_0^x h_{n-1}(t) dt$$

を得る.

1. $n = 1$ のとき, 上の式から,

$$h_1(x) = 2 \int_0^x h_0(t) dt$$

であるが, $h_0(x) = e^{2x} - 1$ であるので, $0 \leq t \leq x \leq 1$ のとき,

$$0 \leq h_0(t) \leq h_0(x)$$

である. 積分の単調性より,

$$0 \leq 2 \int_0^x h_0(t) dt \leq h_0(x) \cdot (2x) \leq h_0(1) \cdot (2x)$$

であるので, 題意は成立する.

2. $n = k$ で題意が成立したとする. つまり, $0 \leq t \leq x \leq 1$ について,

$$0 \leq h_k(t) \leq h_0(1) \frac{(2t)^n}{n!}$$

である. この辺々を 0 から x まで積分して,

$$0 \leq \int_0^x h_k(t) dt \leq h_0(1) \int_0^x \frac{(2t)^n}{n!} dt = h_0(1) \frac{(2x)^{n+1}}{2 \cdot (n+1)!}$$

となる. したがって,

$$0 \leq h_{k+1}(x) \leq h_0(1) \frac{(2x)^{n+1}}{(n+1)!}$$

となり, $n = k + 1$ でも成立する.

以上より題意は示された.

(4)(3) より,

$$0 \leq h_n(1) \leq h_0(1) \frac{2^n}{n!}$$

を得る. ここで, $m > 0$ を整数とすると,

$$\frac{2}{2m+1} < \frac{1}{m}$$

であるから, n が奇数で $n = 2m + 1$ のとき,

$$0 \leq \frac{2^n}{n!} < 2 \frac{1}{(m!)^2}$$

であり, n が偶数で $n = 2m$ のとき,

$$0 \leq \frac{2^n}{n!} < 2 \frac{1}{\{(m-1)!\}^2 m}$$

であるが, いずれにせよ, $n \rightarrow \infty$ のとき, $2^n / (n!) \rightarrow 0$ である. よって,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(1) = 0$$

である. ここで, $h_n(1) = g(1) - f_n(1)$ だったので,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(1) = g(1) = e^2 \cdots (\text{答})$$

である.

t	$\cdots$	$-\sqrt{2}k$	$\cdots$	$\sqrt{2}k$	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(t)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$

表 1: 2 の増減表