

$$\text{III} \quad (1) \sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{2} \quad \underline{ア--1 \quad イ--2}$$

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{a}{2} \text{ より,}$$

$$\frac{1}{2}((\sin \theta + \cos \theta)^2 - 1) = \sin \theta \cos \theta = -\frac{3}{8}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{2} = -\frac{3}{8} \quad a = -\frac{3}{4}$$

$$\underline{ウ--3 \quad エ--4}$$

$$\sin 2\theta = 2\sin \theta \cos \theta \text{ より,}$$

$$\sin 2\theta = a = -\frac{3}{4}$$

$$\underline{オ--3 \quad カ--4}$$

$$\cos 4\theta = 1 - 2\sin^2 2\theta = 1 - 2\left(-\frac{3}{4}\right)^2 = 1 - \frac{9}{8} = -\frac{1}{8}$$

$$\underline{キ--1 \quad ク--8}$$

$$(2) \quad 5\vec{a} + 4\vec{b} + 3\vec{c} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} = -\frac{4}{5}\vec{b} - \frac{3}{5}\vec{c}$$

$$\underline{ア--4 \quad イ--5 \quad ウ--3 \quad エ--5}$$

$$\vec{a} = -\frac{4}{5}\vec{b} - \frac{3}{5}\vec{c} \text{ より}$$

$$\vec{OD} = \frac{4}{5}k\vec{b} + \frac{3}{5}k\vec{c} \text{ となれば } BC \text{ 上にあるには,}$$

$$\frac{4}{5}k + \frac{3}{5}k = \frac{7}{5}k = 1 \Leftrightarrow k = \frac{5}{7}$$

$$\underline{ア--5 \quad セ--7}$$

$$OA:OD = 1:k = 1:\frac{5}{7}$$

$$\underline{ユ--5 \quad タ--7}$$

$$\Delta OBC = \frac{k}{1+k} \Delta ABC = \frac{5}{12} \Delta ABC$$

$$\underline{チ--5 \quad ツ--1 \quad テ--2}$$

$$BD:DC = 3:4 \text{ より, } \Delta OAB:\Delta OCA = 3:4 \text{ となり,}$$

$$\Delta OAB:\Delta OBC:\Delta OCA = 3:5:4 \quad \underline{ト--3 \quad ナ--5 \quad ニ--4}$$

(3)

$$(a) \quad |4+3i|^2 = 4^2 + 3^2 = 25$$

$$\underline{ア--2 \quad ア--5}$$

$$(b) \quad |(a+bi)| \cdot |(c+di)| = |(4+3i)|$$

で「ある」ので、

$$\sqrt{a^2+b^2} \sqrt{c^2+d^2} = \sqrt{4^2+3^2} = 5$$

$$a^2+b^2=1 \text{ のとき, } \sqrt{c^2+d^2}=5 \Leftrightarrow c^2+d^2=25$$

$$\text{又 } ac-bd=4 \quad bc+ad=3 \text{ である。}$$

これを満たす整数 a, b, c, d は a, b の組が $(0, 1), (0, -1), (1, 0), (-1, 0)$ の4組あり、

$$(a, b, c, d) = (0, 1, 3, -4), (0, -1, 3, 4), (1, 0, 4, 3),$$

$$(-1, 0, -4, -3) \text{ の4組}$$

$$\underline{1--4}$$

(c) a, b 整数より $1 < a^2 + b^2 < 10$ のとき、

$$a^2 + b^2 = 2, 5, 4, 9 \text{ のとき}$$

この中で、 $\sqrt{a^2+b^2} \sqrt{c^2+d^2} = 5$ を満たす整数 c, d が存在するのは

$a^2 + b^2 = 5$ のとき。よって、 $a \geq 0$ をつかい調べてみると、

$$(a, b, c, d) = (1, 2, 2, -1) \text{ の2組。}$$

$$(2, -1, 1, 2)$$

$$\underline{1--1 \quad エ--2 \quad ヲ--2 \quad ア--1}$$

$$\underline{ホ--2 \quad マ--1 \quad ミ--1 \quad リ--2}$$

(d) $\sqrt{a^2+b^2} \sqrt{c^2+d^2} = 5$ を満たすのは、

$$\sqrt{a^2+b^2} = 1 \quad \sqrt{c^2+d^2} = 5$$

$$\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{c^2+d^2} = \sqrt{5} \text{ のときのみである。}$$

$$\sqrt{a^2+b^2} = 5 \quad \sqrt{c^2+d^2} = 1$$

の2通り、 $\sqrt{a^2+b^2} = 5 \quad \sqrt{c^2+d^2} = 1$ のとき、

$$(a, b, c, d) = (3, -4, 2, 1), (-3, 4, 2, -1) \text{ となる。よって、} 4+4+2=10 \text{ 組}$$

$$(4, 3, 1, 2), (-4, -3, -1, -2)$$

$$\underline{1--1 \quad エ--2}$$

2

$$(1) x^2 + ax + b = (x + \frac{a}{2})^2 + b - \frac{a^2}{4}$$

$$\text{より } p = -\frac{a}{2} \quad q = b - \frac{a^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow a = -2p \quad b = p^2 + q$$

$$\text{よって } a = -2p \quad b = p^2 + q$$

(2) 2点間のキヨリが4になるという事は、
2点は $y = 2x$ 上の点なので、x座標の差は $\frac{4}{\sqrt{5}}$

今、2点のx座標は、

$$x^2 + ax + b - 2x = x^2 + (a-2)x + b = 0 \text{ の2解なので、}$$

$$x \text{ の差は、 } \sqrt{a^2 - 4a + 4 - 4b} \text{ である。}$$

$$\sqrt{a^2 - 4a + 4 - 4b} = \frac{4}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow 5a^2 - 20a + 4 - 20b = 0$$

$$\text{よって、 } b = \frac{1}{4}a^2 - a + \frac{1}{5} \text{ より } p \text{ は}$$

$$p(-\frac{a}{2}, -a + \frac{1}{5}) \text{ である。よって } p \text{ の軌跡は、}$$

$$y = 2x + \frac{1}{5}$$

$$y = 2x + \frac{1}{5}$$

$$(3) \text{ii) より } b < 0 \text{ なので、 } \frac{10-4\sqrt{5}}{5} < a < \frac{10+4\sqrt{5}}{5}$$

(a)

$$p = -\frac{a}{2} \text{ より、}$$

$$-\frac{5+2\sqrt{5}}{5} < p < -\frac{5-2\sqrt{5}}{5}$$

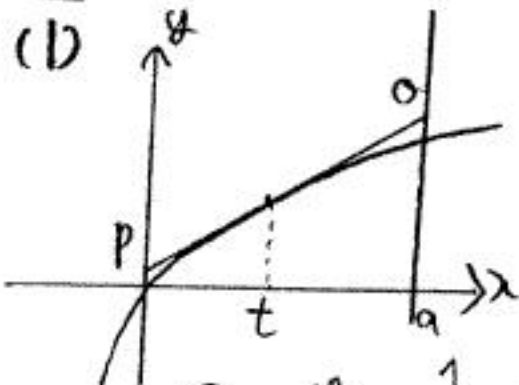
(b) $(-1, 0)$ から、 $y = 2x + \frac{1}{5}$ に垂線 $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ をおくと、
この2線の交点は、 $(-\frac{7}{25}, -\frac{9}{25})$

$$-\frac{5+2\sqrt{5}}{5} < -\frac{7}{25} < -\frac{5-2\sqrt{5}}{5} \text{ であるので、}$$

存在する。

$$\text{答 } p(-\frac{7}{25}, -\frac{9}{25})$$

131



$(t, \frac{1}{a} \log(t+1))$ における C の接線
は、 $y = \frac{1}{a(t+1)}(x-t) + \frac{1}{a} \log(t+1)$
とて、

$$S = \int_0^a \frac{1}{a(t+1)} x - \frac{t}{a(t+1)} + \frac{1}{a} \log(t+1) dx$$

$$= \left[\frac{1}{2a(t+1)} x^2 - \frac{t}{a(t+1)} x + \frac{1}{a} \log(t+1) x \right]_0^a$$

$$= \frac{a}{2(t+1)} - \frac{t}{(t+1)} + \log(t+1)$$

$f(t) = \frac{a}{2(t+1)} - \frac{t}{(t+1)} + \log(t+1)$ とおくと、

$f'(t) = \frac{2t-a}{2(t+1)^2}$ より増減表は、以下の通り。とて、

t	0		$\frac{a}{2}$		a
f'(t)	-		0	+	
f(t)	y			↑	

S を最大にするのは $t = \frac{a}{2}$
このとき

$$S = \log\left(\frac{a}{2} + 1\right)$$

(2) (a) $T = S - \int_0^a \frac{1}{a} \log(x+1) dx$

$$= S - \frac{1}{a} \left[(x+1) \log(x+1) - x \right]_0^a$$

$$= S - \frac{a+1}{a} \log(a+1) + 1$$

とて S が最大になると T も最大になるので、

$$m = \log\left(\frac{a}{2} + 1\right) - \frac{a+1}{a} \log(a+1) + 1$$

(b) $\lim_{a \rightarrow \infty} m = \lim_{a \rightarrow \infty} \log\left(\frac{a}{2} + 1\right) - \left(1 + \frac{1}{a}\right) \log(a+1) + 1$

$$= \lim_{a \rightarrow \infty} \log(a+2) - \log(a+1) - \frac{1}{a} (\log a + \log(1 + \frac{1}{a})) + 1 - \log 2$$

$$= \lim_{a \rightarrow \infty} \log \frac{a+2}{a+1} - \frac{\log a}{a} - \frac{1}{a} \log\left(1 + \frac{1}{a}\right) + 1 - \log 2$$

∴ $\lim_{a \rightarrow \infty} \log \frac{a+2}{a+1} = \lim_{a \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a+1}\right) = 0$ $\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\log a}{a} = 0$ $\lim_{a \rightarrow \infty} \log\left(1 + \frac{1}{a}\right) = 0$

$$\lim_{a \rightarrow \infty} m = 1 - \log 2$$

$$\underline{\underline{1 - \log 2}}$$