

大問1

ア	1	イ	2	ウ	3	エ	2	オ	2	カ	2	キ	4	ク	1	ケ	1	コ	0
サ	3	シ	6	ス	2	セ	1	ソ	1	タ	2	チ	2	ツ	1	テ	0	ト	2
ナ	2	ニ	2	ヌ	4	ネ	0	ノ	1	ハ	9	ヒ	3	フ	2	ヘ	1	ホ	2
マ	1	ミ	5	ム	2	メ	4	モ	6	ヤ	2	ユ	2	(モ・ヤは順不同)					

(1) $(t, t^3 - t - 3)$ における接線の方程式は $y' = 3t^2 - 1$ より,

$$y = (3t^2 - 1)(x - t) + (t^3 - t - 3), \text{ かつ } y = (3t^2 - 1)x - (2t^3 + 3).$$

$P(2, -1)$ がこの直線上にあるので, $-1 = 2(3t^2 - 1) - (2t^3 + 3)$,

$$\Leftrightarrow 2t^3 - 6t^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t^2 - 2t - 2) = 0 \Leftrightarrow t = 1, 1 \pm \sqrt{3}.$$

よって、接線は 3本 で、接点の x 座標は $1, 1 \pm \sqrt{3}$

(2) (a) (1) と同様、接線の式は $y = (3t^2 + a)x - (2t^3 - b)$

P がこの直線上にあるので $-1 = 2(3t^2 + a) - (2t^3 - b)$

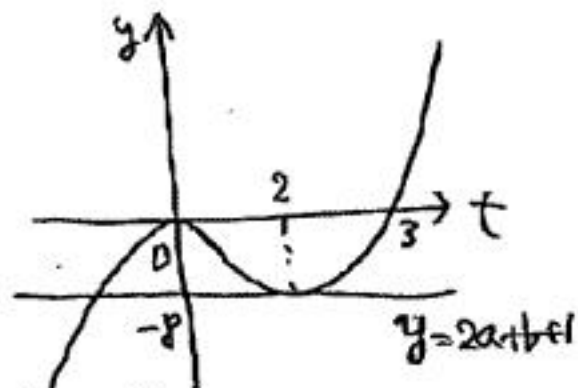
$$\Leftrightarrow 2t^3 - 6t^2 - (2a + b + 1) = 0. \text{ これが2つの実解をもたせよ.}$$

$f(t) = 2t^3 - 6t^2$ と $t=0$ と $t=3$ のとき $y = f(t)$ のグラフと $y = 2a + b + 1$ が

2つの共有点をもたせよ. $f'(t) = 6t(t-2)$ より,

右のグラフにたどり、条件は,

$$2a + b + 1 = 0, -8 \Leftrightarrow 2a + b = -1, -9$$



$$P \text{ が } C \text{ 上にある} \Leftrightarrow -1 = 8 + 2a + b \Leftrightarrow 2a + b = -9$$

より、求める条件は、 $2a + b = -1$

(b) $2t^3 - 6t^2 = 0$ より x 座標は $0, 3$.

(c) 2つの接線の傾きの積が -1 であることが必要十分で

$$a(a+27) = -1 \quad a = \frac{-27 \pm 5\sqrt{29}}{2}$$

$$\therefore (a, b) = \left(\frac{-27 \pm 5\sqrt{29}}{2}, 26 \mp 5\sqrt{29} \right) \quad (a, b \text{ は符号相反})$$

$$(1) \frac{a}{x} = -(a+1)x + 2a+1 \Leftrightarrow a = -(a+1)x^2 + (2a+1)x$$

$$\Leftrightarrow (a+1)x^2 - (2a+1)x + a = 0 \Leftrightarrow ((a+1)x - a)(x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{a}{a+1}, 1. \quad \therefore, \frac{a}{a+1} \neq 1, \frac{a}{a+1} > 0 \text{ より, 交点は}$$

$a=0$ 以外に 2 個ある。//

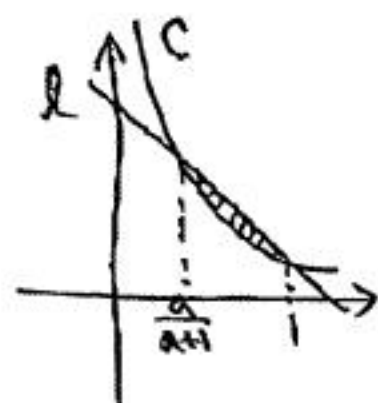
$$(2) \frac{a}{a+1} = 1 - \frac{1}{a+1} < 1 \text{ より,}$$

$$S(a) = \int_{\frac{a}{a+1}}^1 \left(-(a+1)x + (2a+1) - \frac{a}{x} \right) dx$$

$$= \left[-\frac{a+1}{2}x^2 + (2a+1)x - a \log x \right]_{\frac{a}{a+1}}^1$$

$$= -\frac{a+1}{2} \cdot \left(1 - \left(\frac{a}{a+1} \right)^2 \right) + (2a+1) \left(1 - \frac{a}{a+1} \right) + a \log \frac{a}{a+1}$$

$$= -\frac{2a+1}{2(a+1)} + \frac{2a+1}{a+1} + a \log \frac{a}{a+1} = \frac{2a+1}{2(a+1)} + a \log \frac{a}{a+1}$$



$$(b) t = \frac{1}{a+1} \text{ とする. } a = \frac{1}{t} - 1 \text{ を代入して,}$$

$$S(a) = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{t} - 1 \right) + \left(\frac{1}{t} - 1 \right) \log(1-t) = \left(1 - \frac{t}{2} \right) + \left(\frac{1}{t} - 1 \right) \log(1-t).$$

$$\therefore \text{これを } T(t) \text{ とすると, } T'(t) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{t^2} \log(1-t) + \left(\frac{1}{t} - 1 \right) \frac{-1}{1-t}$$

$$= -\frac{1}{t^2} \left(\log(1-t) + t + \frac{1}{2}t^2 \right)$$

$$\therefore \text{これを } f(t) = \log(1-t) + t + \frac{1}{2}t^2 \quad (0 \leq t < 1) \text{ とする.}$$

$$f'(t) = \frac{-1}{1-t} + 1 + t, \quad f''(t) = \frac{-1}{(1-t)^2} + 1 < 0.$$

$$f'(0) = 0 \text{ とおいて, } f'(t) \leq 0 \text{ (等号は } t=0 \text{ のみ)}$$

$$f(0) = 0 \text{ とおいて, } f(t) \leq 0 \text{ (等号は } t=0 \text{ のみ)}$$

$$\therefore, 0 < t < 1 \text{ で } f(t) < 0, \text{ つまり, } T'(t) > 0.$$

つまり, $T(t)$ は t について単調増加であり, a は t について単調減少である.

$$(c) (b) \text{ より, } \lim_{a \rightarrow +\infty} S(a) < S(a) < \lim_{a \rightarrow +0} S(a).$$

$a \rightarrow +\infty$ のとき

$$\frac{2a+1}{2(a+1)} = 1 - \frac{1}{2(a+1)} \rightarrow 1.$$

$$a \log \frac{a}{a+1} = -a \cdot \frac{\log(a+1) - \log a}{(a+1) - a} = -a \cdot \frac{1}{a+c} \quad (0 < c < 1) \quad \text{平均値の定理}$$

$$\rightarrow -1 \quad (a \rightarrow \infty).$$

$$\therefore \lim_{a \rightarrow +\infty} S(a) = 0.$$

$a \rightarrow +0$ のとき

$$\frac{2a+1}{2(a+1)} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

$$\lim_{a \rightarrow 0} a \log \frac{a}{a+1} = \lim_{a \rightarrow 0} \left(-a \log \left(1 + \frac{1}{a} \right) \right) = 0$$

$$\left(\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log(1+t)}{t} = 0 \text{ であり } t \mapsto \frac{1}{a} \text{ とする} \right)$$

$$\therefore \lim_{a \rightarrow +0} S(a) = \frac{1}{2}$$

$$\therefore, \underline{0 < S(a) < \frac{1}{2}}$$