

1

(1)

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ
1	6	7	1	1	4	8	1	5	8	1	8

(2)

ス	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ
0	3	2	2	2	7	4

(3)

ト	ナ	ニ	ヌ	ネ	ノ	ハ	ヒ	フ
2	3	1	3	1	3	6	4	3
ヘ	ホ	マ	ミ	ム	メ	モ	ヤ	ユ
8	3	3	5	9	7	4	5	8

(1)

$$\begin{aligned}
 \vec{v} \cdot \vec{w} &= \cos^2 \theta - \frac{3}{5} + k(4 \sin \theta + 5k) \\
 &= -\sin^2 \theta + \frac{2}{5} + 4k \sin \theta + 5k^2 \\
 &= -x^2 + 4kx + 5k^2 + \frac{2}{5} \cdots (\text{答})
 \end{aligned}$$

(2)(1)の結果に $k = 3/10$ を代入すると,

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = -x^2 + \frac{6}{5}x + \frac{17}{20}$$

となる. $\vec{v}$ と $\vec{w}$ は直交するので, $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$ でなくてはならないから,

$$-x^2 + \frac{6}{5}x + \frac{17}{20} = 0$$

$$\text{を解くと, } x = \frac{17}{10}, -\frac{1}{2}$$

 $|x| \leq 1$ に注意して, $x = -1/2$ を得る. 従って, $\sin \theta = -1/2$ なので, 求める θ は,

$$\theta = \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi \quad \cdots (\text{答})$$

である.

(3) $|x| < 1$ の範囲において, $\sin \theta = x$ は 2 つの解を持ち, $x = \pm 1$ では一つの解を持つ. さらに x は方程式

$$f(x) = -x^2 + 4kx + 5k^2 + \frac{2}{5} = 0$$

の解である. よって題意の条件が満たされるのは, 上の方程式が, $|x| < 1$ の範囲で 2 つの実数解を持つときである.まず判別式を D とすると,

$$\frac{D}{4} = 4k^2 + 5k^2 + \frac{2}{5} > 0$$

となり, 常に満たされる. そこで, この 2 つの解が両方とも $|x| < 1$ の範囲にあるためには,

- ・ $|y = f(x)|$ のグラフの軸 < 1
- ・ $f(1) < 0$
- ・ $f(-1) < 0$

となることが必要条件である. さらに, $k = 0$ のとき, $\vec{v} = \left(\cos^2 \theta - \frac{3}{5}, 0 \right)$ となり, $\frac{2}{5} - x^2 = 0$ のとき, $\vec{v} = \vec{0}$ となり不適. $x^2 \neq \frac{2}{5}$ とすると, $\vec{v} \cdot \vec{w} \neq 0$ となり, $\vec{v} \perp \vec{w}$ とならない. よって $k \neq 0$ である.

以上の条件より,

$$|2k| < 1, 5k^2 + 4k - \frac{3}{5} < 0, 5k^2 - 4k - \frac{3}{5} < 0 \text{ かつ } k \neq 0$$

を得る. これを解いて,

$$\frac{2 - \sqrt{7}}{5} < k < 0, 0 < k < \frac{-2 + \sqrt{7}}{5} \cdots (\text{答})$$

を得る.

(1)

$$f'(x) = \frac{2(1-x^2)}{1+x^2}$$

なので, $f'(x) = 0$ となる x の値は $x = -1, 1$ である. このとき増減表は以下 (別ページ参照) になり, $f(x)$ は $x = -1$ で極小値 $f(-1) = -1$ をとり, $x = 1$ で極大値 $f(1) = 1$ をとる. 従って, $y = f(x)$ のグラフは次のようになる (別ページ参照).

(2)

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x \frac{2t}{1+t^2} dt \\ &= \int_0^x \frac{(1+t^2)'}{1+t^2} dt \\ &= [\log(1+t^2)]_0^x \\ &= \log(1+x^2) \cdots (\text{答}) \end{aligned}$$

(3) $F(a+h) - F(a) = 1$ に (2) の結果を代入して,

$$\log\{1+(a+h)^2\} - \log(1+a^2) = 1$$

であるから,

$$1+(a+h)^2 = e(1+a^2)$$

を得る. これを h について解いて, $h > 0$ に注意すると,

$$h = -a + \sqrt{e(a^2+1)-1} \cdots (\text{答})$$

を得る.

次に $h = g(a)$ とおくと,

$$g'(a) = -1 + \frac{ae}{\sqrt{e(a^2+1)-1}}$$

なので, $g'(a) = 0$ となる a は $a > 0$ で $a = e^{-1/2}$ のみである. よって, 増減表は以下 (別ページ参照) のようになり, h は $a = e^{-1/2}$ で最小値 $e^{1/2} - e^{-1/2}$ をとる.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$

表 1: 3-(1) の増減表

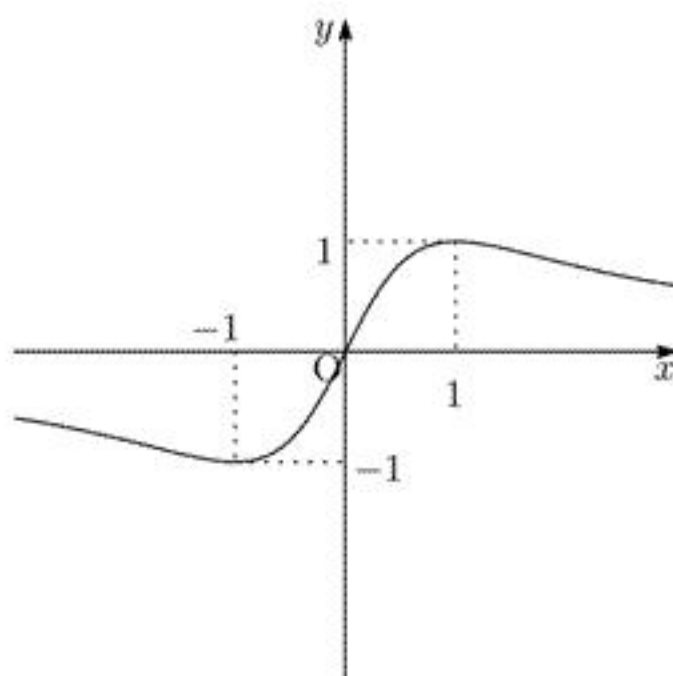


図 1: 3-(1) のグラフ

a	0	$\cdots$	$e^{-1/2}$	$\cdots$
$g'(a)$		$-$	0	$+$
$g(a)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$

表 2: 3-(3) の増減表