

1

(1)

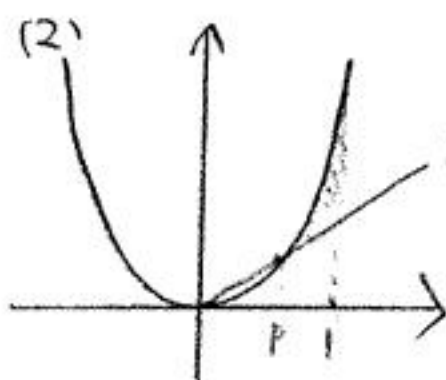
$$\frac{D}{4} = (a-1)^2 - 2(2a^2+a+1)$$

$$= -3a^2 - 4a - 1 = -(a+1)(3a+1) \geq 0$$

$$\text{が必要より } (a+1)(3a+1) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq a \leq -\frac{1}{3}$$

$$\text{答 } \overline{1} \dots 1 \quad \text{イ} \dots 1 \quad \text{ウ} \dots 3$$



左図より

$$\begin{aligned} S_1 + S_2 &= \int_0^p (px - x^2) dx + \int_p^1 (x^2 - px) dx \\ &= \left[\frac{p}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^p + \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{p}{2}x^2 \right]_p^1 \\ &= \frac{1}{3}p^3 - \frac{1}{2}p + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$f(p) = \frac{1}{3}p^3 - \frac{1}{2}p + \frac{1}{3} \text{ とすると}$$

$$f'(p) = p^2 - \frac{1}{2} \text{ より 増減表は、下図より } S_1 + S_2 \text{ を最大にする}$$

p	0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		1
f'(p)		-		+	
f(p)		$\searrow$	$\frac{\sqrt{2}-1}{3\sqrt{2}}$	$\nearrow$	

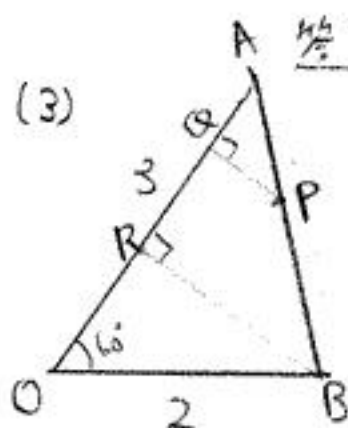
$$p \text{ は } \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{答 } \overline{1} \dots 2$$

$$\therefore \text{最大値 } S_1 + S_2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3\sqrt{2}}$$

$$\text{答 } \overline{1} \dots 1 \quad \text{カ} \dots 3 \quad \text{キ} \dots 3 \quad \text{ク} \dots 2$$

(3)



$$\begin{aligned} &\text{BからOAに下した垂線の足をRとすると、} OR=1 \text{ となる。} \\ &\text{AQ:QR=AP:PB=2:3 \text{ より、} OR=2 \times \frac{3}{5} = \frac{6}{5} \text{ となる。} \end{aligned}$$

$$\vec{OQ} = \frac{11}{15} \vec{a}$$

$$\text{答 } \text{ケ} \dots 1 \quad \text{コ} \dots 1 \quad \text{サ} \dots 1 \quad \text{シ} \dots 5$$

$$\vec{OP} = \frac{2}{5} \vec{b} + \frac{3}{5} \vec{a} \text{ であるので、}$$

$$\vec{PQ} = \vec{OQ} - \vec{OP} = \frac{11}{15} \vec{a} - \frac{2}{5} \vec{b} - \frac{3}{5} \vec{a} = \frac{2}{15} \vec{a} - \frac{2}{5} \vec{b}$$

$$\text{答 } \text{ス} \dots 2 \quad \text{セ} \dots 1 \quad \text{ソ} \dots 5 \quad \text{タ} \dots 2 \quad \text{チ} \dots 5$$

$$\vec{PQ} = \frac{2}{15} \vec{a} - \frac{2}{5} \vec{b} \text{ より、}$$

$$|\vec{PQ}|^2 = \left(\frac{2}{15} \vec{a} - \frac{2}{5} \vec{b} \right)^2$$

$$= \frac{4}{225} + \frac{4}{25} + 4 - \frac{8}{15} \vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$= \frac{4}{5} - \frac{8}{25} = \frac{12}{25}$$

よって

$$|\vec{PQ}| = \frac{2\sqrt{3}}{5}$$

$$\text{答 } \text{リ} \dots 2 \quad \text{テ} \dots 3 \quad \text{ト} \dots 5$$

[2]

(1) $f(x) - g(x) = x^3 + 6x^2 - 36x - t \geq 0$

が $x \geq 0$ において常に成立するには、

$r(x) = x^3 + 6x^2 - 36x - t$ とおくと、

$r'(x) = 3x^2 + 12x - 36 = 3(x-2)(x+6)$

より $x \geq 0$ において増減表は、下のようになる。

x	0		2	
$r'(x)$		-	0	+
$r(x)$	t	$\searrow$	$t-40$	$\nearrow$

$r(x) \geq 0$ が $x \geq 0$ で常に成立するには、

$r(2) = -t - 40 \geq 0$

$\Leftrightarrow -40 \geq t$ が必要。

よって $t \leq -40$

(2) $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ を満たす任意の x_1, x_2 に対して、 $f(x_1) \geq g(x_2)$ が常に成立するには、

$x \geq 0$ における $f(x)$ の最小値が $x \geq 0$ における $g(x)$ の最大値以上である必要がある。

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$

より増減表は、下のようになり $x \geq 0$ における $f(x)$ の

x	0		3	
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	0	$\searrow$	-27	$\nearrow$

最小値は、 $f(3) = -27$ となる。

$g'(x) = -18x + 27 = -18(x - \frac{3}{2})$ より増減表は

x	0		$\frac{3}{2}$	
$g'(x)$		+	0	-
$g(x)$	t	$\nearrow$	$t + \frac{81}{4}$	$\searrow$

左図のようになり $x \geq 0$ における $g(x)$ の最大値は $g(\frac{3}{2}) = t + \frac{81}{4}$ である。

よって必要なのは、 $f(3) \geq g(\frac{3}{2})$

$\Leftrightarrow -27 \geq t + \frac{81}{4}$

$\Leftrightarrow t \leq -\frac{189}{4}$

よって $t \leq -\frac{189}{4}$

[3]

(1) $5! = \underline{120 \text{通り}}$

(2) 番号が一致する3つのひき出しの選び方は、

$${}_5C_3 = 10$$

又、のこり2つのひき出しの入替方は1通りなので、

答 10通り

(3) 一致する2つの選び方は、

$${}_5C_2 = 10$$

のこり3つの入替方は、2通りより、

$$10 \times 2 = \underline{20 \text{通り}}$$

(4) 一致する番号の選び方は

$${}_5C_1 = 5 \text{通り}$$

のこり4つをかばうないように入替方法は
書換と9通りある。

$$\text{よって } 5 \times 9 = \underline{45 \text{通り}}$$

(5) 5つとも一致するのは1通りなので、
すべて一致しないのは、

$$120 - 1 - 10 - 20 - 45 = \underline{44 \text{通り}}$$