

$$(1) f(a) = f(3a) \Leftrightarrow a e^{-2a} = 3a e^{-6a}$$
$$\Leftrightarrow a e^{-6a} (e^{4a} - 3) = 0$$

$$a, e^{-6a} \neq 0 \neq 1, e^{4a} = 3 \quad \therefore \underline{a = \frac{1}{4} \log 3, b = \frac{3}{4} \log 3}.$$

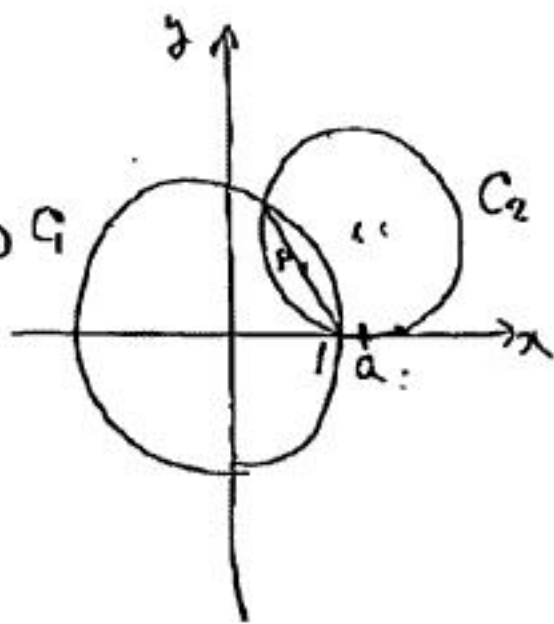
$$(2) \int x e^{-2x} dx = x \left(-\frac{1}{2} e^{-2x} \right) - \int \left(-\frac{1}{2} e^{-2x} \right) dx$$
$$= -\frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{4} e^{-2x} + C \quad \text{f'!},$$

$$\int_a^b f(x) dx = -\frac{1}{2} (f(b) - f(a)) - \frac{1}{4} (e^{-6a} - e^{-2a})$$
$$= -\frac{1}{4} \left(\frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \underline{\underline{\frac{1}{6\sqrt{3}}}}$$

($\because f(b) = f(a)$).

$$(1) \quad C_1: x^2 + y^2 = 1, \quad C_2: (x-a)^2 + (y-r)^2 = r^2$$

$$\cdots \textcircled{1} \quad \text{展開して } x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2ry = 0 \quad \textcircled{2}$$



$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ より, } 2ax - a^2 + 2ry = 1$$

$$\therefore \underline{2ax + 2ry = 1 + a^2}$$

- (2) C_1 は $y < 0$ 側の点を含むが, C_2 は含まず,
 C_2 は $y > 1$ 側の点を含む ($\because r > \frac{1}{2}$) が, C_1 は含まない。
 C_1, C_2 の一方が他方を包含することはない。

$$\text{よって, 条件は, } \sqrt{a^2 + r^2} < 1 + r \Leftrightarrow a^2 < 1 + 2r$$

$$\Leftrightarrow \underline{-\sqrt{1+2r} < a < \sqrt{1+2r}}$$

$$(3). \quad P(\alpha, \beta) \text{ とすると, } 2a\alpha + 2r\beta = 1 + a^2 \cdots \textcircled{3}$$

$$OP \text{ は, (1) で得た直線と垂直な直線で, } \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 2a \\ 2r \end{pmatrix}$$

$$\alpha = k a, \beta = k r \text{ とし, } \textcircled{3} \text{ に代入して, } 2(a^2 + r^2)k = 1 + a^2$$

$$\therefore k = \frac{1 + a^2}{2(a^2 + r^2)} \quad \therefore \underline{P\left(\frac{a(1+a^2)}{2(a^2 + r^2)}, \frac{r(1+a^2)}{2(a^2 + r^2)}\right)}$$

$$(4) \quad \text{但し } a \neq 0 \text{ として } r = 1 \text{ を代入して, } P\left(\frac{a}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$-\sqrt{3} < a < \sqrt{3} \text{ とおくと,}$$

$$\underline{\text{直線 } y = \frac{1}{2}a \text{ かつ } -\frac{\sqrt{3}}{2} < x < \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ の部分}}$$

3

$$(1) \quad \underline{a_1 = 1-p, \quad b_1 = p} \quad \begin{cases} a_{n+1} = (1-p)a_n + p b_n & \text{--- ①} \\ b_{n+1} = p a_n + (1-p)b_n & \text{--- ②} \end{cases}$$

$$(2) \quad \text{①-② sly, } \underline{x_{n+1} = (1-2p)x_n}$$

$$(3) \quad x_1 = a_1 - b_1 = 1-2p \text{ sly, } x_n = (1-2p)^{n-1}$$

$$b_n = 1 - a_n \text{ sly, } x_n = a_n - b_n = 2a_n - 1.$$

$$\therefore a_n = \frac{1 + (1-2p)^{n-1}}{2}, \quad b_n = \frac{1 - (1-2p)^{n-1}}{2}$$