

大問1

ア 1 イ 1 ウ 3 エ 2 オ 1 カ 3 キ 3 ク 2 ケ 1 コ 1
サ 1 シ 5 ス 2 セ 1 ソ 5 タ 2 チ 5 ツ 2 テ 3 ト 5

$$(1) A^2 = \begin{pmatrix} ac & ad \\ bc & bd \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ac & ad \\ bc & bd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2c^2 + abcd & a^2cd + abd^2 \\ abcd + b^2cd & abcd + b^2d^2 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{(ac+bd)A}$$

$$(2) (1) \text{より直して, } A^3 = (ac+bd)^2 A.$$

$$\begin{aligned} \therefore (E+A)^3 &= E + 3A + 3A^2 + A^3 \\ &= E + \left(3 + 3(ac+bd) + (ac+bd)^2 \right) A \end{aligned}$$

$$(3) (uE+vA)(E+A) = uE + (u+v+v(ac+bd))A$$

より, $u=1$, $u+v+v(ac+bd)=0$ かつ $u, v \neq 0$ 存在すれば

よいから, $ac+bd \neq -1$. よし, $(u, v) = \left(1, \frac{-1}{1+ac+bd} \right)$ が条件を

満たす. $\therefore (E+A)^{-1} = \underline{E - \frac{1}{1+ac+bd} A}$

$$(4) (1) \text{より, } A^2 = 0 \text{ より, } A^k = 0 \ (k \geq 2).$$

$$\therefore (E+A)^n = E + \sum_{k=1}^n nC_k A^k = \underline{E + nA}$$

$$(5) (1) \text{より, } A^2 = A \text{ より, } A^k = A \ (k \geq 2).$$

$$\begin{aligned} \therefore (E+A)^n &= E + \sum_{k=1}^n nC_k A^k = E + \sum_{k=1}^n nC_k A \\ &= E + \left(\sum_{k=0}^n nC_k - 1 \right) A = E + ((1+1)^n - 1) A \quad (\text{二項定理}) \\ &= \underline{E + (2^n - 1)A} \end{aligned}$$

3

$$(1) 5! = \underline{120 \text{ 通り}}$$

(2) 一致する引き出しの選び方が ${}_5C_1 = 10$ 通りで、それを決めれば一意に定まるので、 $10 \times 1 = \underline{10 \text{ 通り}}$

(3) 一致する引き出しの選び方が ${}_5C_2 = 10$ 通り。それを 4, 5 とする。
1, 2, 3 の決め方は箱 1, 2, 3 それぞれに入るカードの組み合わせが (2, 3, 1), (3, 1, 2) の 2 通りがある。他の場合も同じなので、
 $10 \times 2 = \underline{20 \text{ 通り}}$

(4) 一致する引き出しの選び方が 5 通り。それを 5 とする。
1~4 の決め方は、箱 1, 2, 3, 4 それぞれに入るカードの組み合わせが (2, 1, 4, 3), (2, 3, 4, 1), (2, 4, 1, 3), (3, 1, 4, 2), (3, 4, 1, 2), (3, 4, 2, 1), (4, 1, 2, 3), (4, 3, 1, 2), (4, 3, 2, 1) の 9 通りがある。
他の場合も同じなので、 $5 \times 9 = \underline{45 \text{ 通り}}$

(5) すべての引き出しで一致する場合が 1 通り。

$$\text{よって、求めるものは、} 120 - 10 - 20 - 45 - 1 = \underline{44 \text{ 通り}}$$