

F 1 数 学

この冊子は、数学の問題で 1 ページより 5 ページまであります。

〔注 意〕

- (1) 試験開始の指示があるまで、この冊子を開いてはいけません。
- (2) 受験番号等記入の指示があったら、直ちに解答用紙に志望学科・受験番号を記入しなさい。解答用マークシートには受験番号および氏名を記入し、さらに受験番号・志望学科をマークしなさい。
- (3) 解答は所定の解答用紙に記入したものおよび解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。
- (4) 解答用マークシートについて
 - ① 解答用マークシートは絶対に折り曲げてはいけません。
 - ② マークには黒鉛筆(HBまたはB)を使用しなさい。指定の黒鉛筆以外でマークした場合は採点されません。
 - ③ 誤ってマークした場合は消しゴムで丁寧に消し、消しくずを完全に取り除いた上、新たにマークし直しなさい。
 - ④ マークは横 1 行について 1 箇所に限ります。2 箇所以上マークすると採点されません。あいまいなマークは無効となるので、はっきりマークしなさい。
- (5) 試験開始の指示があったら、初めに問題冊子のページ数を確認しなさい。
- (6) 問題冊子は、試験終了後、持ち帰りなさい。

問題 1 の解答は解答用マークシートにマークせよ。

1 次の (1) から (3) において、 内のカタカナおよびひらがなにあてはまる 0 から 9 までの数字を求め、その数字を解答用マークシートにマークせよ。ただし は 1 桁または 2 桁の数を表すものとし、あてはまる数が 1 桁のときは 10 の位に 0 を記入すること。例えば にあてはまる数が 1 のときは、 0 1 と記入するものとする。また分数における分母と分子は、1 以外の公約数をもたないものとする。 (40 点)

(1) (a) a, b は実数, $b \neq 0$ とする。 $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ s & t \end{pmatrix}$ が

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} P = P \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$$

を満たすとき, $s = \text{ア}$, $t = -\text{イ}$ である。 P の逆行列 P^{-1} を,

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 \\ q_3 & q_4 \end{pmatrix} \text{ とするとき,}$$

$$q_1 = \frac{\text{ウ}}{\text{エ}}, q_2 = \frac{\text{オ}}{\text{カ}}, q_3 = \frac{\text{キ}}{\text{ク}}, q_4 = -\frac{\text{ケ}}{\text{コ}}$$

である。

(b) n は自然数とする。

$$\begin{pmatrix} 34 & 18 \\ 18 & 34 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix}$$

とするとき,

$$2e = \text{サシ}^n - \text{スセ}^n$$

$$2f = \text{ソタ}^n + \text{チツ}^n \quad (\text{ただし } \text{ソタ} > \text{チツ})$$

である。

右のページは白紙です。

(2) i は虚数単位とし ($i^2 = -1$), $\beta = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}$ とすると, $\beta^{\boxed{\text{ア}}} - 1 = 0$ より (ただし $\boxed{\text{ア}} \neq 0$)

$$\beta^4 + \beta^3 + \boxed{\text{イ}} \beta^2 + \beta + 1 = 0$$

である。これより

$$\beta^2 + \beta + \boxed{\text{エ}} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta^2} = 0$$

が得られ,

$$\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right)^2 + \left(\beta + \frac{1}{\beta}\right) - \boxed{\text{オ}} = 0 \dots\dots\dots \text{①}$$

となる。さて

$$\frac{1}{\beta} = \boxed{\text{カ}} \cos \frac{2\pi}{5} - i \left(\boxed{\text{キ}} \sin \frac{2\pi}{5} \right)$$

であるから, $\beta + \frac{1}{\beta}$ は正の実数である。ゆえに①より

$$\beta + \frac{1}{\beta} = \frac{-\boxed{\text{ク}} + \sqrt{\boxed{\text{ケ}}}}{\boxed{\text{コ}}}$$

となり,

$$\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{-\boxed{\text{ク}} + \sqrt{\boxed{\text{ケ}}}}{\boxed{\text{コ}}}$$

が得られる。

右のページは白紙です。

- (3) a, b を正の定数とし, xy 平面上の楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ を C で表す。 C 上に 3 頂点を持ち, 1 辺が x 軸に平行な正三角形は 2 つ存在する。そのうちの 1 つの正三角形の 3 頂点は, ある実数 u, v により $(-u, v), (0, b), (u, v)$ のように表される。ただし $0 < u \leq a, -b < v < b$ である。

この 3 点が C 上にあるという条件と, 正三角形の頂点であるという条件は,

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1,$$

$$\boxed{\text{マ}} u^2 = u^2 + (b - v)^2$$

と表される。これを解くと,

$$v = \frac{-\boxed{\text{ミ}} a \boxed{\text{ム}} b \boxed{\text{メ}} + b \boxed{\text{モ}}}{\boxed{\text{ヤ}} a^2 + \boxed{\text{ユ}} b^2}, \quad u = \frac{\boxed{\text{ヨ}} \sqrt{\boxed{\text{ラ}} a \boxed{\text{リ}} b \boxed{\text{ル}}}}{\boxed{\text{ヤ}} a^2 + \boxed{\text{ユ}} b^2}$$

である。

もう 1 つの正三角形の C 上にある頂点を P_1, P_2, P_3 とし, 辺 P_1P_2 が x 軸に平行とすると, P_1, P_2 の座標はそれぞれ $(-u', v'), (u', v')$ としてよい。ただし $0 < u' \leq a, -b < v' < b$ である。このとき

$$v' = \frac{\boxed{\text{レ}} a \boxed{\text{ロ}} b \boxed{\text{ア}} - b \boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}} a^2 + \boxed{\text{エ}} b^2}, \quad u' = \frac{\boxed{\text{オ}} \sqrt{\boxed{\text{カ}} a \boxed{\text{キ}} b \boxed{\text{ク}}}}{\boxed{\text{ウ}} a^2 + \boxed{\text{エ}} b^2}$$

である。

右のページは白紙です。

問題 **2** の解答は解答用紙に記入せよ。

2 t, u, a, b, r ($r > 0$) は実数とする。円 C の方程式は $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ とし、点 $P(t, u)$ は円 C 上の点とする (ただし $u \neq b$)。 (30 点)

(1) 点 $P(t, u)$ における円 C の $\frac{dy}{dx}$ の値, $\frac{d^2y}{dx^2}$ の値を, t, u, a, b, r で表せ。

注意:

$$g(x) = b - \sqrt{r^2 - (x-a)^2} \quad (a-r < x < a+r),$$

$$h(x) = b + \sqrt{r^2 - (x-a)^2} \quad (a-r < x < a+r)$$

とすると、 $y = g(x)$ のグラフは円 C の下側の部分 C_1 を表し、 $y = h(x)$ のグラフは円 C の上側の部分 C_2 を表す。例えば点 $P(t, u)$ が C_1 上にあるとき ($b-r \leq u < b$)、点 $P(t, u)$ における円 C の $\frac{dy}{dx}$ の値, $\frac{d^2y}{dx^2}$ の値とは、それぞれ $g'(t)$, $g''(t)$ のことである。

(2) $f(x) = e^x$ とする (e は自然対数の底)。点 $P(t, u)$ が曲線 $y = f(x)$ 上にあり ($u = e^t \neq b$)、かつ点 $P(t, e^t)$ における円 C の $\frac{dy}{dx}$ の値, $\frac{d^2y}{dx^2}$ の値がそれぞれ $f'(t)$, $f''(t)$ に等しいとする。このとき、 a, b, r を t の式で表せ。

(3) (2) の条件のもとで、 t がすべての実数を動くときの r の最小値と、 r を最小にする t の値を求めよ。

右のページは白紙です。正式な解答は解答用紙に記入しなさい。

問題 **3** の解答は解答用紙に記入せよ。

3 直線 $\ell_m: y = mx$ と曲線 $C_m: y = mx + \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$) について次の間に答えよ。ただし m は自然数とする。 (30 点)

(1) 曲線 C_m 上の点 $P(t, mt + \sin t)$ を通り直線 ℓ_m に垂直な直線が、 ℓ_m と交わる点を H とする。

(a) PH の長さを求めよ。

(b) OH の長さを求めよ。ただし O は原点とする。

(2) 直線 ℓ_m と曲線 C_m で囲まれる図形を、直線 ℓ_m のまわりに 1 回転させてできる立体の体積 V_m を求めよ。

(3) $\lim_{m \rightarrow \infty} m^2(V_m - V_{m+1})$ を求めよ。

右のページは白紙です。正式な解答は解答用紙に記入しなさい。