

G 1 数 学

この冊子は、数学の問題で 1 ページより 5 ページまであります。

〔注 意〕

- (1) 試験開始の指示があるまで、この冊子を開いてはいけません。
- (2) 受験番号等記入の指示があったら、直ちに解答用紙に志望学科・受験番号を記入しなさい。解答用マークシートには受験番号および氏名を記入し、さらに受験番号・志望学科をマークしなさい。
- (3) 解答は所定の解答用紙に記入したものおよび解答用マークシートにマークしたものが採点されます。
- (4) 解答用マークシートについて
 - ① 解答用マークシートは絶対に折り曲げてはいけません。
 - ② マークには黒鉛筆(HBまたはB)を使用しなさい。指定の黒鉛筆以外でマークした場合は採点されません。
 - ③ 誤ってマークした場合は消しゴムで丁寧に消し、消しくずを完全に取り除いた上、新たにマークし直しなさい。
 - ④ マークは横 1 行について 1 箇所に限ります。2 箇所以上マークすると採点されません。あいまいなマークは無効となるので、はっきりマークしなさい。
- (5) 試験開始の指示があったら、初めに問題冊子のページ数を確認しなさい。
- (6) 問題冊子は、試験終了後、持ち帰りなさい。

問題 1 の解答は解答用マークシートにマークせよ。

1 次の(1)から(3)において、 内のカタカナにあてはまる 0 から 9 までの数字を求めて、その数字を解答用マークシートにマークせよ。ただし、 は 1 桁の数、 は 2 桁の数を表す。また、分数は既約分数として表すものとする。

(45 点)

(1) A, B 2つの袋があり、Aには赤玉 1 個と白玉 3 個、Bには白玉のみ 3 個が入っている。Aから 1 個玉を無作為に取り出し、Bに入れよくかき混ぜ、Bから 1 個玉を無作為に取り出してAに戻すという作業を 1 回の作業として、これを n 回繰り返したとき、Aの中に赤玉が入っている確率を P_n とする。

(a) $P_1 = \frac{\begin{array}{|c|c|} \hline \text{ア} & \text{イ} \\ \hline \text{ウ} & \text{エ} \\ \hline \end{array}}{\quad}$ である。

(b) P_{n+1} を P_n で表すと、 $P_{n+1} = \frac{\begin{array}{|c|} \hline \text{オ} \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|c|} \hline \text{カ} & \text{キ} \\ \hline \end{array}} P_n + \frac{\begin{array}{|c|} \hline \text{ク} \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|} \hline \text{ケ} \\ \hline \end{array}}$ となる。

(c) P_n を n を用いて表すと、 $P_n = \frac{\begin{array}{|c|} \hline \text{コ} \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|} \hline \text{サ} \\ \hline \end{array}} \left(\frac{\begin{array}{|c|} \hline \text{シ} \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|c|} \hline \text{ス} & \text{セ} \\ \hline \end{array}} \right)^n + \frac{\begin{array}{|c|} \hline \text{ソ} \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|} \hline \text{タ} \\ \hline \end{array}}$ となる。

右のページは白紙です。

(2)

(a) ① $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \boxed{\text{チ}} \sin x \cos^2 x + \boxed{\text{ツ}} \sin x \cos x$
である。

② $1 + \cos x + \cos 2x = \boxed{\text{テ}} \cos^2 x + \boxed{\text{ト}} \cos x$ である。

(b) $f(x) = \sin x + \sin 2x + \sin 3x - 1 - \cos x - \cos 2x$ とおくと、

$0 \leq x \leq \pi$ において $f(x) \geq 0$ がなりたつ x の範囲は

$$\frac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}} \pi \leq x \leq \frac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}} \pi \quad \text{および} \quad \frac{\boxed{\text{ノ}}}{\boxed{\text{ハ}}} \pi \leq x \leq \frac{\boxed{\text{ヒ}}}{\boxed{\text{フ}}} \pi$$

である。ただし、 $\frac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}} \pi < \frac{\boxed{\text{ノ}}}{\boxed{\text{ハ}}} \pi$ であるとする。

(c) $g(x) = -x + |x|$ とおくと、(b)で定めた $f(x)$ に対して

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(f(x)) dx = -\frac{\boxed{\text{ヘ}} \boxed{\text{ホ}}}{\boxed{\text{マ}}} + \frac{\boxed{\text{ミ}}}{\boxed{\text{ム}}} \sqrt{3} + \frac{\boxed{\text{メ}}}{\boxed{\text{モ}}} \pi$$

が成り立つ。

右のページは白紙です。

(3) $\log_y x - \log_x y = \frac{8}{3}$ と $xy = 16$ を同時に満たす正の実数 x, y の組は

$$(x, y) = (\boxed{\text{ヤ}}, \boxed{\text{ユ}}) \quad \text{と} \quad (x, y) = \left(\frac{\boxed{\text{ヨ}}}{\boxed{\text{ラ}}}, \boxed{\text{リ}} \boxed{\text{ル}} \right)$$

である。

右のページは白紙です。

問題 2 の解答は解答用紙に記入せよ。答だけでなく答を導く過程も記入せよ。

2 a, b, c, d を実数とし, $g(x)$ と $h(x)$ を $g(x) = ax + b, h(x) = cx + d$ で定める。次の間に答えよ。 (30 点)

(1) $g(x)h(x)$ を $x^2 + x - 3$ で割った余りを $px + q$ とするとき,
 p と q を a, b, c, d を用いて表せ。

(2) 次が成り立つような行列 A を a, b を用いて表せ。

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

(3) $g(x)h(x)$ が $x^2 + x - 3$ で割り切れるような 0 でない $h(x)$ が存在するための必要十分条件を a, b を用いて表せ。ただし 0 はすべての整式で割り切れるものとする。

(4) 自然数 n に対し, $\{g(x)\}^n$ を $x^2 + x - 3$ で割った余りを $\alpha_n x + \beta_n$ とおく。

列ベクトル $\begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix}$ を (2) で求めた行列 A を用いて, a, b は使わずに

A と n のみによって表せ。

(5) $(2x + 1)^n$ を $x^2 + x - 3$ で割った余りを求めよ。

右のページは白紙です。

問題 **3** の解答は解答用紙に記入せよ。答だけでなく答を導く過程も記入せよ。

3 曲線 $y = \frac{1}{x} (x > 0)$ 上の点 $P(a, \frac{1}{a})$ における接線を ℓ とする。

k を自然数とするととき、次の問に答えよ。 (25 点)

(1) ℓ 上に 2 点 $Q(k, q)$, $R(k+1, r)$ をとったとき、 q, r を a と k を用いて表せ。

(2) $k \leq a \leq k+1$ とするとき、 ℓ と x 軸および 2 直線 $x = k$, $x = k+1$ で囲まれた領域の面積を S_a とおく。

S_a の $k \leq a \leq k+1$ における最大値、およびそれを与える a の値を求めよ。

(3) 上の結果を用いて、すべての自然数 n に対して

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{2n+1} < \frac{1}{2} \log(n+1)$$

が成り立つことを証明せよ。ここで、 $\log(n+1)$ は $n+1$ の自然対数を表す。

右のページは白紙です。