

B 1 数 学

この冊子は、数学の問題で 1 ページより 5 ページまであります。

〔注 意〕

- (1) 試験開始の指示があるまで、この冊子を開いてはいけません。
- (2) 受験番号等記入の指示があったら、直ちに解答用紙に志望学科・受験番号を記入しなさい。解答用マークシートには受験番号および氏名を記入し、さらに受験番号・志望学科をマークしなさい。
- (3) 解答は所定の解答用紙に記入したものおよび解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。
- (4) 解答用マークシートについて
 - ① 解答用マークシートは絶対に折り曲げてはいけません。
 - ② マークには黒鉛筆(HBまたはB)を使用しなさい。指定の黒鉛筆以外でマークした場合は採点されません。
 - ③ 誤ってマークした場合は消しゴムで丁寧に消し、消しくずを完全に取り除いた上、新たにマークし直しなさい。
 - ④ マークは横 1 行について 1 箇所に限ります。2 箇所以上マークすると採点されません。あいまいなマークは無効となるので、はっきりマークしなさい。
- (5) 試験開始の指示があったら、初めに問題冊子のページ数を確認しなさい。
- (6) 問題冊子は、試験終了後、持ち帰りなさい。

問題 1 の解答は解答用マークシートにマークしなさい。

1 次の文章中の ア から ユ までに当てはまる数字 0～9 を求めて、解答用マークシートの指定された欄にマークしなさい。ただし、分数は既約分数として表しなさい。(40 点)

(1) a, b, c は定数として、 x の関数 $f(x)$ と $g(x)$ を

$$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad g(x) = x^2 - 2x$$

とする。すべての x に対して、 $h(g(x)) = f(x)$ が成り立つような 2 次関数

$$h(x) = x^2 + px + q$$

が存在するのは、 $a = -\text{ア}$ 、 $c = -\text{イ}b + \text{ウ}$ のときである。このとき、 $p = b - \text{エ}$ 、 $q = d$ となる。

そのとき、さらに $g(h(x)) = f(x)$ がすべての x について成り立つならば、 $p = -\text{オ}$ 、 $q = \text{カ}$ であり、 $b = \text{キ}$ 、 $c = \text{ク}$ である。

右のページは白紙です。

- (2) つぼに赤玉 3 個と黒玉 5 個が入っている。このつぼから無作為に玉を 1 つ取り出し、取り出した玉と同じ色の玉を 1 つ加えて元に戻す。例えば、取り出した玉が赤ならば、2 個の赤玉をつぼに入れる。この操作を繰り返し行う。なお、玉の大きさは無視できるものとし、操作を何回でも繰り返しできるものとする。

(a) 2 回目に赤玉を取り出す確率は $\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$ である。

(b) 1 回目から 5 回続けて赤玉を取り出す確率は $\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}} \boxed{\text{ス}} \boxed{\text{セ}}}$ である。

(c) 1 回目から n 回続けて赤玉を取り出す確率を p_n とし、自然数 k に対して、

$$a_n = n^k p_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

とおく。数列 $\{a_n\}$ が 0 でない値に収束するとき、 $k = \boxed{\text{ソ}}$ であり、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \boxed{\text{タ}} \boxed{\text{チ}} \boxed{\text{ツ}} \boxed{\text{テ}}$$

である。

右のページは白紙です。

- (3) 原点を O とする xyz 空間内に、3 点 $A(3, 2, 0)$, $B(0, 6, 0)$, $C(0, 4, 5)$ があり、線分 OB 上に点 $P(0, t, 0)$ ($0 \leq t \leq 6$) がある。点 P を通り xz 平面と平行な平面が四面体 $OABC$ から切り取る図形が四角形となるのは、 $\boxed{\text{ト}} < t < \boxed{\text{ナ}}$ のときである。点 P 以外のこの四角形の頂点を x 座標の小さいものから順に Q, R, S とすると、

$$Q \text{ の座標は } \left(0, t, \frac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}} t \right) \text{ であり,}$$

$$R \text{ の座標は } \left(-\frac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}} t + \boxed{\text{ハ}}, t, \frac{\boxed{\text{ヒ}}}{\boxed{\text{フ}}} t - \boxed{\text{ヘ}} \right) \text{ であり,}$$

$$S \text{ の座標は } \left(-\frac{\boxed{\text{ホ}}}{\boxed{\text{マ}}} t + \frac{\boxed{\text{ミ}}}{\boxed{\text{ム}}}, t, 0 \right) \text{ である。}$$

この四角形の面積を D とする。 D が最大となるのは、 $t = \boxed{\text{メ}}$ のときであって、

$$\text{このとき, } D = \frac{\boxed{\text{モ}} \cdot \boxed{\text{ヤ}}}{\boxed{\text{ユ}}} \text{ である。}$$

右のページは白紙です。

問題 2, 3 の解答は解答用紙に記入しなさい。

2 k は $0 < k \leq 1$ となる定数として、 $f(x) = x^2 - k^2$ とおく。また、 t は $0 < t \leq 1$ となる定数として、 $g(x) = \frac{x+t-|x-t|}{2t}$ とおき、

$$I = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

とする。

- (1) I を、 t と k を用いて表せ。
- (2) t が $0 < t \leq 1$ の範囲を動くとき、 I の最大値 M を、 k を用いて表せ。
- (3) k が $0 < k \leq 1$ の範囲を動くとき、(2) で求めた I の最大値 M が取り得る値の範囲を求めよ。

(30 点)

右のページは白紙です。

3

x の関数 $f_0(x), f_1(x), f_2(x), \dots$ を

$$f_0(x) = 1,$$

$$f_n(x) = 1 + \frac{2}{1!}x + \frac{2^2}{2!}x^2 + \dots + \frac{2^n}{n!}x^n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

により定義する。

(1) 自然数 n に対して,

$$f_n(x) - 2 \int_0^x f_{n-1}(t) dt$$

を計算せよ。

(2) 定数 a, b に対し, $g(x) = ae^{bx}$ とする。すべての x について,

$$g(x) = 2 \int_0^x g(t) dt + 1$$

が成り立つように, a, b の値を定めよ。

(3) $g(x)$ を (2) で定めた関数とする。 $n = 0, 1, 2, \dots$ に対して,

$h_n(x) = g(x) - f_n(x)$ とおく。このとき, $0 \leq x \leq 1$ ならば,

$$0 \leq h_n(x) \leq h_0(1) \frac{(2x)^n}{n!}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

が成り立つことを, n に関する数学的帰納法により証明せよ。

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(1)$ を求めよ。

(30 点)

右のページは白紙です。