

D 1 数 学

この冊子は、数学の問題で 1 ページより 5 ページまであります。

〔注 意〕

- (1) 試験開始の指示があるまで、この冊子を開いてはいけません。
- (2) 受験番号等記入の指示があったら、直ちに解答用紙に志望学科・受験番号を記入しなさい。解答用マークシートには受験番号および氏名を記入し、さらに受験番号・志望学科をマークしなさい。
- (3) 解答は所定の解答用紙に記入したものおよび解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。
- (4) 解答用マークシートについて
 - ① 解答用マークシートは絶対に折り曲げてはいけません。
 - ② マークには黒鉛筆(HBまたはB)を使用しなさい。指定の黒鉛筆以外でマークした場合は採点されません。
 - ③ 誤ってマークした場合は消しゴムで丁寧に消し、消しくずを完全に取り除いた上、新たにマークし直しなさい。
 - ④ マークは横 1 行について 1 箇所に限ります。2 箇所以上マークすると採点されません。あいまいなマークは無効となるので、はっきりマークしなさい。
- (5) 試験開始の指示があったら、初めに問題冊子のページ数を確認しなさい。
- (6) 問題冊子は、試験終了後、持ち帰りなさい。

問題 1 の解答は解答用マークシートにマークしなさい。

1 次の文章中の ア から ユ までに当てはまる数字 0～9 を求めて、解答用マークシートの指定された欄にマークしなさい。ただし、分数は既約分数として表しなさい。

(40 点、ただし数学科は 60 点)

(1) 座標平面上の 3 点 $O(0,0)$, $A(1,1)$, $B(-1,2)$ に対して、

$$\overrightarrow{OP} = s \overrightarrow{OA} + t \overrightarrow{OB}$$

とおく。実数 s, t が条件

$$s \geq 0, \quad t \geq 0, \quad s + t = 2$$

を満たしながら変化するとき、点 $P(x, y)$ の軌跡は、直線

$$y = -\frac{\text{ア}}{\text{イ}}x + \text{ウ}$$

上の $C(\text{エ}, \text{オ})$, $D(-\text{カ}, \text{キ})$ を端点とする線分である。ベクトル $\overrightarrow{OC}$ と $\overrightarrow{OD}$ のなす角を θ とすると、

$$\cos \theta = \frac{\text{ク}}{\sqrt{\text{ケ} \text{コ}}}, \quad \sin \theta = \frac{\text{サ}}{\sqrt{\text{ケ} \text{コ}}} \quad (\text{ただし, } \text{ケ} \text{コ} < 40 \text{ とする})$$

である。また、 $\triangle OCD$ の面積は シ である。

右のページは白紙です。

(2) 2 次の正方行列 A, P を

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix}$$

とする。

$$A \begin{pmatrix} 2 \\ a \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 2 \\ a \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} -1 \\ b \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -1 \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ -1 \end{pmatrix}$$

が成り立つとすると,

$$k = \boxed{\text{ス}}, \quad a = -\boxed{\text{セ}}, \quad b = \boxed{\text{ソ}}, \quad c = \boxed{\text{タ}}$$

である。このとき,

$$AP = P \begin{pmatrix} \boxed{\text{チ}} & \boxed{\text{ツ}} \\ \boxed{\text{テ}} & \boxed{\text{ト}} \end{pmatrix}$$

となり, さらに, 自然数 n に対して,

$$(P^{-1}AP)^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & n\beta^{n-1} \\ 0 & \alpha^n \end{pmatrix}$$

となる。ここで, $\alpha = \boxed{\text{ナ}}, \beta = \boxed{\text{ニ}}$ である。これより, A^n を求めると, 例えば,

$$A^{20} = \boxed{\text{ナ}}^{20} \begin{pmatrix} 21 & \boxed{\text{ヌ}} \boxed{\text{ネ}} \\ -10 & -\boxed{\text{ノ}} \boxed{\text{ハ}} \end{pmatrix}$$

となる。

右のページは白紙です。

- (3) 複素数 $\alpha = a + bi$ (a, b は実数で, i は虚数単位) が, $\alpha^2 = i\bar{\alpha}$ を満たすとする。ただし, $a > 0$ とする。このとき,

$$a = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ヒ}}}}{\boxed{\text{フ}}}, \quad b = \frac{\boxed{\text{ヘ}}}{\boxed{\text{ホ}}}$$

である。複素数 $\beta = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$ に対して, $z = \frac{\beta}{\alpha}$ とおくと,

$$z = \cos \boxed{\text{マ}} \boxed{\text{ミ}}^\circ + i \sin \boxed{\text{マ}} \boxed{\text{ミ}}^\circ$$

であり, $1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = 0$ を満たす最小の自然数 n は, $n = \boxed{\text{ム}} \boxed{\text{メ}}$ である。この n に対して,

$$z^{n-1} + \frac{1}{z^{n-1}} = \frac{\sqrt{\boxed{\text{モ}}}}{\boxed{\text{ユ}}} + \sqrt{\boxed{\text{ヤ}}}$$

である。

右のページは白紙です。

問題 2, 3 の解答は解答用紙に記入しなさい。

2 次の問いに答えよ。

- (1) 点 $P(2, -1)$ から曲線 $y = x^3 - x - 3$ に接線が何本引けるか。接線の本数と、各接点の x 座標を求めよ。
- (2) a, b を定数とする。点 $P(2, -1)$ から曲線 $C: y = x^3 + ax + b$ に接線がちょうど2本引けるという。ただし、点 P は曲線 C 上にないものとする。
- (a) a と b の満たすべき条件を求めよ。
- (b) 各接点の x 座標を求めよ。
- (c) これらの接線が直交するとき、 a, b の値を求めよ。

(30 点, ただし数学科は 45 点)

右のページは白紙です。

3

a は正の定数として、曲線 $C: y = \frac{a}{x}$ ($x > 0$) と直線 $\ell: y = -(a+1)x + 2a+1$ を考える。このとき、次の問いに答えよ。

(1) C と ℓ の交点の個数は、 a の値によらずに一定であることを示せ。

(2) C と ℓ で囲まれた部分の面積を $S(a)$ とする。

(a) $S(a)$ を、 a を用いて表せ。

(b) a の関数 $S(a)$ ($a > 0$) は、単調減少関数であることを示せ。

(c) 関数 $S(a)$ ($a > 0$) の取り得る値の範囲を求めよ。

必要ならば、 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log(1+t)}{t} = 0$ を用いてもよい。

(30 点、ただし数学科は 45 点)

右のページは白紙です。