

E 1 数 学

この冊子は、数学の問題で 1 ページより 5 ページまであります。

〔注 意〕

- (1) 試験開始の指示があるまで、この冊子を開いてはいけません。
- (2) 受験番号等記入の指示があったら、直ちに解答用紙に志望学科・受験番号を記入しなさい。解答用マークシートには受験番号および氏名を記入し、さらに受験番号・志望学科をマークしなさい。
- (3) 解答は所定の解答用紙に記入したものおよび解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。
- (4) 解答用マークシートについて
 - ① 解答用マークシートは絶対に折り曲げてはいけません。
 - ② マークには黒鉛筆(HBまたはB)を使用しなさい。指定の黒鉛筆以外でマークした場合は採点されません。
 - ③ 誤ってマークした場合は消しゴムで丁寧に消し、消しくずを完全に取り除いた上、新たにマークし直しなさい。
 - ④ マークは横 1 行について 1 箇所に限ります。2 箇所以上マークすると採点されません。あいまいなマークは無効となるので、はっきりマークしなさい。
- (5) 試験開始の指示があったら、初めに問題冊子のページ数を確認しなさい。
- (6) 問題冊子は、試験終了後、持ち帰りなさい。

問題 **1** の解答は解答用マークシートにマークせよ。

1 以下の問題 (1) から (3) において、空欄内のカタカナの 1 文字にあてはまる 0 から 9 までの数字を求めて、解答用マークシートの所定欄にマークせよ。ただし、分数は既約分数（それ以上約分できない分数）で表し、値が整数になるときは分母を 1 とせよ。(40 点)

(1) 座標平面上の放物線 $y = -4x^2 + 1$ を C とする。放物線 C 上に点 $P(t, -4t^2 + 1)$ をとる。ただし、 $t > 0$ とする。O を原点として、線分 OP の長さの 2 乗 OP^2 を t で表すと、

$$OP^2 = \boxed{\text{ア}} \boxed{\text{イ}} t^4 - \boxed{\text{ウ}} t^2 + \boxed{\text{エ}}$$

となる。従って、 t が $t > 0$ の範囲を動くとき、線分 OP の長さが最小になるのは、

$$t = \frac{\sqrt{\boxed{\text{オ}} \boxed{\text{カ}}}}{\boxed{\text{キ}}} \text{ のときであり、線分 OP の長さの最小値は } \frac{\sqrt{\boxed{\text{ク}} \boxed{\text{ケ}}}}{\boxed{\text{コ}}} \text{ である。}$$

このとき、点 P の座標は

$$\left(\frac{\sqrt{\boxed{\text{オ}} \boxed{\text{カ}}}}{\boxed{\text{キ}}}, \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}} \right)$$

である。

* 右のページは白紙です。

(2) a, b, c を実数の定数とする。 x の 3 次関数

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

が $x = -1$ で極大値 4 をとるとする。さらに、方程式 $f(x) = 0$ が $x = 1$ を解にもつとする。

このとき、

$$a = \boxed{\text{ス}}, b = -\boxed{\text{セ}}, c = \boxed{\text{ソ}}$$

であり、方程式 $f(x) = 0$ の $x = 1$ 以外の実数解は $x = -\boxed{\text{タ}}$ である。

さらに、座標平面上で、曲線 $y = f(x)$ および x 軸によって囲まれた図形の面積は

$$\frac{\boxed{\text{チ}} \cdot \boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}} \text{ である。}$$

* 右のページは白紙です。

- (3) 座標平面上に3点A(3,3), B(-1,0), C(0,-2)がある。 d は実数の定数で $d > 0$ とする。次の条件

$$AP^2 + BP^2 + CP^2 = d^2 \quad \dots\dots ①$$

をみたす点Pの集合を K とする。

点Pの座標を (x, y) として、条件①を書き直すと、

$$\left(x - \frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}\right)^2 + \left(y - \frac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}\right)^2 = \frac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}}\left(d^2 - \frac{\boxed{\text{ハ}}\boxed{\text{ヒ}}}{\boxed{\text{フ}}}\right)$$

となる。したがって、

$$0 < d < \frac{\boxed{\text{ヘ}}}{\boxed{\text{ホ}}}\sqrt{\boxed{\text{マ}}}\text{のとき、}K\text{は空集合である。}$$

$$d = \frac{\boxed{\text{ヘ}}}{\boxed{\text{ホ}}}\sqrt{\boxed{\text{マ}}}\text{のとき、}K\text{は1点}\left(\frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}, \frac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}\right)\text{から成る集合である。}$$

$$d > \frac{\boxed{\text{ヘ}}}{\boxed{\text{ホ}}}\sqrt{\boxed{\text{マ}}}\text{のとき、}$$

$$K\text{は中心}\left(\frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}, \frac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}\right), \text{半径}\sqrt{\frac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}}\left(d^2 - \frac{\boxed{\text{ハ}}\boxed{\text{ヒ}}}{\boxed{\text{フ}}}\right)}$$

の円である。

$$\text{以後、}d > \frac{\boxed{\text{ヘ}}}{\boxed{\text{ホ}}}\sqrt{\boxed{\text{マ}}}\text{とする。円}K\text{が点Aを通るのは}d = \sqrt{\boxed{\text{ミ}}\boxed{\text{ム}}}$$

のときである。このとき、点Aにおける円 K の接線の方程式は

$$\frac{\boxed{\text{メ}}}{\boxed{\text{モ}}\boxed{\text{ヤ}}}x + \frac{\boxed{\text{ユ}}}{\boxed{\text{モ}}\boxed{\text{ヤ}}}y = 1$$

である。

* 右のページは白紙です。

問題 **2** および問題 **3** の解答はそれぞれの解答用紙に記入せよ。

2 θ, k を実数として、平面上の2つのベクトル

$$\vec{v} = \left(\cos^2 \theta - \frac{3}{5}, k \right), \vec{w} = \left(1, 4 \sin \theta + 5k \right)$$

を考える。このとき、以下の問いに答えよ。(30点)

(1) $x = \sin \theta$ とおき、 $\vec{v}$ と $\vec{w}$ の内積 $\vec{v} \cdot \vec{w}$ を計算して x と k の式で表せ。

(2) $k = \frac{3}{10}$ のとき、 $\vec{v}$ と $\vec{w}$ が直交するような θ の値が $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲で2つある。その2つの θ の値を求めよ。

(3) $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲の異なる4つの θ の値で $\vec{v}$ と $\vec{w}$ が直交するとき、 k の値の範囲を求めよ。

* 右のページは白紙です。

3 実数全体を定義域とする関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

で定める。このとき、以下の問いに答えよ。

(30 点)

(1) 関数 $f(x)$ の極大値と極小値、およびそれらをとる x の値を求めて、 $y = f(x)$ のグラフの概形を描け。

(2) $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ とする。この積分を計算して $F(x)$ を x の式で表せ。

(3) 上で定義された $F(x)$ に対して、 a と h が等式

$$F(a+h) - F(a) = 1$$

を満たすとする。ただし、 $a > 0$ 、 $h > 0$ とする。このとき h を a の式で表せ。さらに、 a が $a > 0$ の範囲を動くとき、 a の関数 h の最小値とそのときの a の値を求めよ。

* 右のページは白紙です。