

1

(1)

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ
1	8	4	2	7	1	9	5	4

(2)

コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	あ	い	う
2	2	3	1	3	1	2	1	偽	真	真

(3)

ツ	テ	ト	ナ	ニ	ヌ	ネ
4	3	1	3	1	3	1
ノ	ハ	ヒ	フ	ヘ	ホ	マ
7	2	4	2	3	8	7
ミ	ム	メ	モ	ヤ	ユ	ヨ
2	3	1	7	2	4	4

(1) C_1 と C_2 の中心の座標は (a, t_1) 、 (t_2, b) とおくことができる。外接するという条件から、中心間の距離は半径の和である $a + b$ なので、

$$(t_2 - a)^2 + (t_1 - b)^2 = (a + b)^2 \cdots (*)$$

である。しかも、 P はこの 2 点を $a : b$ に内分する点であるから、

$$\begin{cases} x = \frac{a(t_2 + b)}{a + b} \\ y = \frac{b(t_1 + a)}{a + b} \end{cases}$$

である。これらから、

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{(a + b)y - ab}{b} \\ t_2 &= \frac{(a + b)x - ab}{a} \end{aligned}$$

を得る。これを $(*)$ に代入して整理すると、

$$\frac{(x - a)^2}{a^2} + \frac{(y - b)^2}{b^2} = 1$$

が求める方程式である。

(2) 平行移動しても面積は変わらないので、 x 軸方向に $-a$ 、 y 軸方向に $-b$ 平行移動した、

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

という曲線で囲まれる部分 D の面積を求めれば十分である。 $-a \leq x \leq a$ を固定したとき (x, y) が D に属するのは、

$$-b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \leq y \leq b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

のときである。よって、求める面積は、

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a \frac{2b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \frac{2b}{a} \cdot \frac{\pi a^2}{2} \\ &= \pi ab \end{aligned}$$

である。

注意 (2) の積分計算では、 $\int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$ が半径 a の半円の面積であることを使っている。

(1)

$$P(x) = (x^2 + 1)(x + a) + (b - 1)x + c - a$$

$$P(x) = (x^2 - 1)(x + a) + (b + 1)x + c + a$$

であるから、条件より、

$$\begin{cases} c - a = m + n \\ c + a = -(m + n) \\ b = mn \end{cases}$$

という関係式を得る。これを解いて、 $(a, b, c) = (-m - n, mn, 0)$ を得る。

(2) $P(x) = x(x - m)(x - n)$ と因数分解できるので、 $P(x) = 0$ の解は、 $x = 0, m, n$ である。

(3) $0 < m < n$ なので、

$$S = \int_0^m P(x) dx, T = - \int_m^n P(x) dx$$

となるので、これを計算して、

$$S = \frac{m^3}{12}(2n - m), T = \frac{1}{12}(m + n)(n - m)^3$$

を得る。

$2n - m$ と m の偶奇は一致するので、 m を奇数とすると、 $m^3(2n - m)$ も奇数になり、 S は整数にならない。従って、 m は偶数である。すると、 $m \pm n$ と n の偶奇も一致することから、 n が奇数だとすると、 $(m + n)(n - m)^3$ も奇数になるので、 T が整数にならない。よって、 n も偶数になる。

(4) S と T の式に、 $m = 2k, n = 2l$ を代入すると、

$$S = \frac{4}{3}k^3\{2(l + k) - 3k\}, T = \frac{4}{3}(k + l)\{(l + k) - 2k\}^3$$

である。ここで、 $l + k$ が 3 の倍数かどうかを考える。

$l + k$ が 3 の倍数ならば、 $2(l + k) - 3k$ は 3 の倍数だから、 S は整数になる。また、 T は明らかに整数である。

$l + k$ が 3 の倍数でないとすると、 k が 3 の倍数でないと S は整数にならない。すると、 $(l + k) - 2k$ は 3 の倍数にはならないので、 T は整数にならない。

以上より、 S, T がともに整数となるための必要十分条件は、 $k + l$ が 3 の倍数になることである。

(5) (4) の結果から、 s を自然数として、 $k + l = 3s$ とおくことができる。そこで、これを $S + T$ の表式に代入すると、

$$S + T = 4k^3(2s - k) + 4s(3s - 2k)^3 \cdots (*)$$

となる。ここで、 $k < l$ なので、 $2k < 3s$ である。従って、 $(3s - 2k)^3 > 0$ なので、上の式の右辺第 2 項を落として、

$$S + T > 4k^3(2s - k) > 4k^3\left(\frac{4}{3}k - k\right) > \frac{4}{3}k^4$$

という不等式を得る。 $S + T \leq 240$ という条件から、必要条件として、 $\frac{4}{3}k^4 < 240$ より、 $k \leq 3$ が導かれる。

さて、(*) の右辺を s の関数とみて $f(s)$ とおくと、

$$f'(s) = 8(3s - 2k)^2(6s - k) + 8k^3$$

なので、 $s > \frac{2}{3}k$ ならば、 $6s - k > 3k > 0$ であるから、 $f'(s) > 0$ となるので、この範囲で $f(s)$ は単調増加である。これに注意して具体的に計算すると、

1. $k = 1$ のとき、 $f(1) = 8, f(2) = 524$ より、 $s = 1$ のみ条件を満たす。このとき、 $(m, n) = (2, 4)$ である。
2. $k = 2$ のとき、 $f(2) = 128, f(3) = 1628$ なので、 $s = 2$ のみ条件を満たす。このとき、 $(m, n) = (4, 8)$ である。
3. $k = 3$ のとき、 $f(3) = 648$ なので、条件を満たす s はない。

よって、求める (m, n) は、 $(m, n) = (2, 4), (4, 8)$ である。