

(1) $PQ = t$, $PR = \sqrt{1-t^2} - h(t)$ となるから、条件 $PQ + PR = 1$ より、

$$t + \sqrt{1-t^2} - h(t) = 1$$

となるので、ここから $h(t) = t - 1 + \sqrt{1-t^2}$ を得る。

ここで、線分 OP と x 軸のなす角を θ とすると、 $t = \sin \theta$ である。 $0 \leq t \leq 1$ という条件から、 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ である。このとき、 $h(t) = \sqrt{2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) - 1$ となるので、 $h(t)$ は $\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

つまり、 $t = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ で最大値 $\sqrt{2} - 1$ をとる。

(2)(1) より、 $a(s), b(s)$ は t についての方程式

$$s = t + \sqrt{1-t^2} - 1$$

を得る。この式を整理して、

$$\begin{aligned} 1 - t^2 &= (s + 1 - t)^2 \\ 2t^2 - (2s + 2)t + (s + 1)^2 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

という 2 次方程式になる。よって、解と係数の関係より、 $a(s) + b(s) = s + 1$ である。また、

$$(a(s) - b(s))^2 = (a(s) + b(s))^2 - 4a(s)b(s) = 2 - (s + 1)^2$$

であり、 $s \leq \sqrt{2} - 1$ なので、 $2 - (s + 1)^2 \geq 0$ であるから、 $a(s) - b(s) = \sqrt{2 - (s + 1)^2}$ である。

(3) $v = u^2$ とおくと、 $\frac{dv}{du} = 2u$ であるから、

$$\begin{aligned} \int u \sqrt{1-u^2} du &= \frac{1}{2} \int \sqrt{1-t} dt \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{2}{3} (1-t)^{\frac{3}{2}} \right) + C \quad (C \text{ は積分定数}) \\ &= -\frac{1}{3} (1-u^2)^{\frac{3}{2}} + C \end{aligned}$$

別解 $u = \sin \theta$ とおく。 $\frac{du}{d\theta} = \cos \theta$ なので、

$$\begin{aligned} \int u \sqrt{1-u^2} du &= \int \sin \theta \cos^2 \theta d\theta \\ &= -\frac{1}{3} \cos^3 \theta + C \\ &= -\frac{1}{3} (1-u^2)^{\frac{3}{2}} + C \end{aligned}$$

(4) 求める体積は、 D を x 軸の周りに回転させた立体の体積 V_1 から、 F と y 軸とで囲まれる図形を x 軸の周りに回転させた立体の体積 V_2 を引いたものである。 V_1 は半径が 1 の半球の体積なので、

$$V_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi = \frac{2}{3} \pi$$

である。一方、 V_2 は (2) を用いると、

$$\begin{aligned} V_2 &= \int_0^{\sqrt{2}-1} \pi(a(s)^2 - b(s)^2) ds \\ &= \pi \int_0^{\sqrt{2}-1} (s+1) \sqrt{2-(s+1)^2} ds \\ &= \pi \left[-\frac{1}{3} \{2-(s+1)\}^{\frac{3}{2}} \right]_0^{\sqrt{2}-1} \\ &= \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

なので、 $V = V_1 - V_2 = \frac{\pi}{3}$ である。

別解 $PR = 1 - PQ = 1 - t$ であるから、 F と C と x 軸で囲まれる図形の t から $t + dt$ の部分を x 軸の周りに回転させた立体の体積は、縦 $1 - t$ 、横 $2\pi t$ 、高さが dt の直方体の体積として近似できるから、

$$V = \int_0^1 2\pi t(1-t) dt = \frac{\pi}{3}$$

である。

注意 解答では誘導に従う形にしたが、別解の示すとおり、(4) の体積計算には $h(t)$ 等の形は不要である。

(1)

$$(a) f'(x) = \frac{1 - \log x}{x^2}, \quad f''(x) = \frac{-\frac{1}{x} \cdot x^2 - 2x(1 - \log x)}{x^4} = \frac{2 \log x - 3}{x^3}$$

(b) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e$ より、増減は以下のようになる。

x	0	...	e	...
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		↗	極大	↘

よって、 $x = e$ で $f(x)$ は極大値 $\frac{1}{e}$ をとる。(c) $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = e^{\frac{3}{2}}$ であり、この値以下では $f''(x) \leq 0$ 、この値以上では $f''(x) \geq 0$ であるから、変曲点は $\left(e^{\frac{3}{2}}, \frac{3}{2e^{\frac{3}{2}}}\right)$ である。

(2)

(a)

$$f_n(\sin \theta) + f_n(\cos \theta) = \frac{\log(n+1)}{n+1} \{\sin^3 \theta + \cos^3 \theta - (n+1)\}$$

であるから、 $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta$ の最大と最小を考えればよい。

$$\begin{aligned} \sin^3 \theta + \cos^3 \theta &= (\sin \theta + \cos \theta)^3 - 3 \sin \theta \cos \theta (\sin \theta + \cos \theta) \\ &= (\sin \theta + \cos \theta)^3 - \frac{3}{2} \{(\sin \theta + \cos \theta)^2 - 1\} (\sin \theta + \cos \theta) \\ &= -\frac{1}{2} (\sin \theta + \cos \theta)^3 + \frac{3}{2} (\sin \theta + \cos \theta) \end{aligned}$$

であり、 $k = \sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$ なので、 $-\sqrt{2} \leq k \leq \sqrt{2}$ である。このときの $-\frac{1}{2}k^3 + \frac{3}{2}k$ の範囲を求めればよく、 $-1 \leq \sin^3 \theta + \cos^3 \theta \leq 1$ であることがわかる。よって、

$$M_n = -\frac{n \log(n+1)}{n+1}, \quad m_n = -\frac{(n+2) \log(n+1)}{n+1}$$

である。

(b) $a_n = \frac{2 \log(n+1)}{n+1}$ である。(1) より、 $n \geq 2$ のときは、 $n+1 \leq e$ なので、 $a_n > a_{n+1}$ である。一方、 $n=1$ のときは $a_1 < a_2$ である。よって、最大値は $n=2$ のときの $\frac{2 \log 3}{3}$ をとる。(c) 平均値の定理を使うと、 $n+1 \leq c_n \leq n+2$ となる c_n で、

$$b_n = a_{n+1} - a_n = 2f'(c_n)$$

となるものが存在する。この $\{c_n\}$ は数列としては単調増加である。ところが、(1)(c) より、 $4 < e^{\frac{3}{2}} < 5$ に注意すると、

- $n=1$ ならば、 $b_1 = 2f'(c_1) \geq 2f'(c_2) = b_2$
- $n \geq 4$ ならば、 $b_n = 2f'(c_n) \leq 2f'(c_{n+1}) = b_{n+1}$

が言える。よって、 $n=2, 3, 4$ のときの b_n を比較すればよい。まず、 b_2 と b_3 を比較する。

$$\begin{aligned} b_3 - b_2 &= 2 \left(\frac{\log 5}{5} - \log 2 + \frac{\log 3}{3} \right) \\ &= \frac{2}{15} \log \left(\frac{3^5 \cdot 5^3}{2^{15}} \right) \\ &= \frac{2}{15} \log \left(\frac{243}{256} \right) \\ &< 0 \end{aligned}$$

であるから、 $b_3 < b_2$ を得る。一方、 b_3 と b_4 を比較する。

$$\begin{aligned} b_4 - b_3 &= 2 \left(\frac{\log 2}{2} + \frac{\log 6}{6} - \frac{2 \log 5}{5} \right) \\ &= \frac{1}{15} \log \left(\frac{2^{20} \cdot 3^5}{5^{12}} \right) \\ &= \frac{1}{15} \log \left(\frac{2^2 \cdot 3^5 \cdot (2^{10})^3}{10^{12}} \right) \\ &> 1 \end{aligned}$$

となるから、 $b_4 > b_3$ である。よって、 b_3 が最小で、

最小値は

$$\begin{aligned} b_3 &= 2 \left(\frac{\log 5}{5} - \frac{\log 4}{4} \right) \\ &= \frac{2 \log 5}{5} - \log 2 \end{aligned}$$