$\boxed{1}$

(1)

$$F(0)=0 \quad \cdots ア$$

$$F(2)=4 \quad \cdots イ$$

$$F(3)=9 \quad \cdots ウ$$

$$F^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{2x} & \cdots エ \\ 5-\sqrt{13-x} & \cdots オ, あ, カ, キ\end{cases}$$

(2)(i)

$$c_4=15 \quad \cdots ク, ケ$$

(ii)

3（個） …コ

10(通り) …サシ

(iii)

$$c_2=225 \quad \cdots スセソ$$

$$c_0=120 \quad \cdots タチツ$$

(iv)

$$a_3=0 \quad \cdots テ$$

$$a_2=15 \quad \cdots トナ$$

$$a_1=0 \quad \cdots ニ$$

$$a_0=8 \quad \cdots ヌ$$

$$x=\pm\frac{\sqrt{30\pm 2\sqrt{193}}}{2}i \quad \cdots ネ〜ホ$$

(3)

$$\theta=\frac{1}{24}\pi,\ \frac{7}{24}\pi \quad \cdots マ〜ヤ$$

$$\int_0^{\frac{2}{3}\pi}\left|\overrightarrow{p}\right|^2 d\theta=\frac{8}{3}\pi-\frac{3}{4} \quad \cdots ユ〜リ$$

$$\max\left|\overrightarrow{q}\right|=\frac{3+\sqrt{6}}{3} \quad \cdots ル〜ロ$$

2

(1) $$(A-kE)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \quad \cdots①$$

$A-kE$ が逆行列をもつと仮定すると, $\det(A-kE)\neq 0$

①の両辺に, 左から, $(A-kE)^{-1}$ をかけると,

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=(A-kE)^{-1}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$\therefore\ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ となり, ①が $x=y=0$ 以外の解をもつことに反する.

$\therefore\ \det(A-kE)=0$ 　すなわち, $A-kE$ は逆行列をもたない. ■

$$\det\begin{pmatrix}-3-k & -4\\1 & 2-k\end{pmatrix}=0$$

$$\therefore\ (k-2)(k+3)+4=0$$

$$k^2+k-2=0$$

$$(k+2)(k-1)=0$$

$\therefore\ k=-2,1$ 　よって, $\alpha=-2,\ \beta=1$ …(答)

(2) $$(A-\alpha E)\begin{pmatrix}u\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$\alpha=-2$ より $\begin{pmatrix}-1 & -4\\1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$\therefore\ u=4$ …(答)

$$(A-\beta E)\begin{pmatrix}u\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$\beta=1$ より $\begin{pmatrix}-4 & -4\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$\therefore\ u=-1$ …(答)

(3)(a)
$$\begin{aligned}A^2\begin{pmatrix}u\\-1\end{pmatrix}&=A\cdot A\begin{pmatrix}u\\-1\end{pmatrix}\\&=A\cdot\alpha\begin{pmatrix}u\\-1\end{pmatrix}\quad(\because(2))\\&=\alpha\cdot A\begin{pmatrix}u\\-1\end{pmatrix}\\&=\alpha\cdot\alpha\begin{pmatrix}u\\-1\end{pmatrix}\quad(\because(2))\\&=\alpha^2\begin{pmatrix}u\\-1\end{pmatrix}\\&=(-2)^2\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}16\\-4\end{pmatrix}\end{aligned}$$
…(答)

同様にして, $A^n\begin{pmatrix}u\\-1\end{pmatrix}=\alpha^n\begin{pmatrix}u\\-1\end{pmatrix}=(-2)^n\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\cdot(-2)^n\\-(-2)^n\end{pmatrix}$ …(答)

$$A^n\begin{pmatrix}v\\1\end{pmatrix}=\beta^n\begin{pmatrix}v\\1\end{pmatrix}=1^n\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$ …(答)

(b) $$A^n\begin{pmatrix}u & v\\-1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\cdot(-2)^n & -1\\-(-2)^n & 1\end{pmatrix}(\because(a))$$ …(答)

この両辺に, $\begin{pmatrix}u & v\\-1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -1\\-1 & 1\end{pmatrix}$ の逆行列 $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 4\end{pmatrix}$ を右からかけて,

$$\begin{aligned}A^n&=\begin{pmatrix}4\cdot(-2)^n & -1\\-(-2)^n & 1\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 4\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\dfrac{4\cdot(-2)^n-1}{3} & \dfrac{4\cdot(-2)^n-4}{3}\\ \dfrac{-(-2)^n+1}{3} & \dfrac{-(-2)^n+4}{3}\end{pmatrix}\end{aligned}$$
…(答)

$\boxed{3}$

(1)(a) $\log x = t$ とおくと，$\dfrac{dx}{x} = dt$．$x = e^t$

$$\int (\log x)^2 dx = \int t^2 \cdot e^t dt$$
$$= e^t \cdot t^2 - \int 2t \cdot e^t dt + C_1$$
$$= e^t \cdot t^2 - 2\left(e^t \cdot t - \int 1 \cdot e^t dt + C_2\right)$$
$$= e^t \cdot t^2 - 2\left(e^t \cdot t - e^t + C_2 + C_3\right)$$
$$= e^t(t^2 - 2t + 2) + C$$ （ただし，$C_1 \sim C_3$，C は積分定数）…(答)

(b) $f(x) = x - e\log x \, (x > 0)$

$$f'(x) = 1 - \frac{e}{x}$$
$$= \frac{x-e}{x}$$

x	0	…	e	…
$f'(x)$	／	−	0	+
$f(x)$	／	↘	極小	↗

よって増減表は右のようになる．

$f(x)$は，$x = e$ で極小かつ最小ゆえ，

$f(x) \geqq f(e) = e - e\log e = 0$ ■

(2) $\begin{cases} C: y = g(x) = \sqrt{e}\log x \\ D: y = h(x) = k \cdot e^{-x} \end{cases}$

(a) $x_p = \alpha$ より，$\sqrt{e}\log\alpha = k \cdot e^{-\alpha}$ $\quad \therefore\ k = \dfrac{\sqrt{e}\log\alpha}{e^{-\alpha}}$ …(答)

(b) $g'(x) = \dfrac{\sqrt{e}}{x}$，$\quad h'(x) = -k \cdot e^{-x}$

直交条件より，$\quad \dfrac{\sqrt{e}}{\alpha} \cdot \left(-ke^{-\alpha}\right) = -1$

$$\therefore\ k = \frac{\alpha}{\sqrt{e}} \cdot \frac{1}{e^{-\alpha}}$$

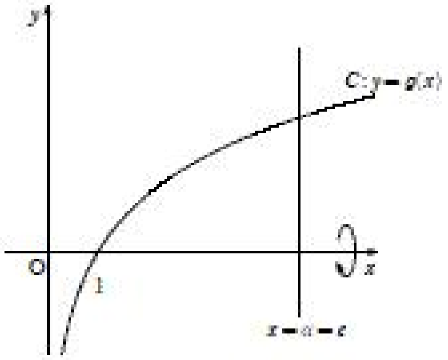
(a)と合わせて，$\dfrac{\sqrt{e}\log\alpha}{e^{-\alpha}} = \dfrac{\alpha}{\sqrt{e} \cdot e^{-\alpha}}$

$$\therefore\ \alpha - e\log\alpha = 0$$

(1)(b)より，$f(x) = x - e\log x = 0$ の解は $x = e$ 唯一つ．

$\therefore\ \alpha = e$ …(答)

(c)



$$V = \int_1^e \pi g(x)^2 dx$$
$$= e\pi \int_1^e (\log x)^2 dx$$
$$= e\pi\left[e^x(x^2 - 2x + 2)\right]_0^1 \quad (\because\ (1)(a))$$
$$= e\pi(e - 2)$$
$$= e\pi(e^2 - 2e)$$ …(答)