

1

(1)

番号	ア	イ	ウ	エ	オ	カ
答	2	3	2	5	4	1
番号	キ	ク	ケ	コ	サ	シ
答	1	1	7	1	6	1
番号	ス					
答	9					

(2)

番号	ア	イ	ウ	エ	オ	カ
答	3	4	1	4	0	3
番号	キ	ク	ケ	コ	サ	シ
答	4	1	4	2	1	0
番号	ス	セ	ソ	タ	チ	
答	1	0	2	2	0	

(3)

番号	ア	イ	ウ	エ	オ	カ
答	1	2	0	0	3	3
番号	キ	ク	ケ	コ	サ	シ
答	3	6	4	2	0	1
番号	ス	セ	ソ	タ	チ	
答	6	0	2	3	2	

2

$$(1)(a) \quad J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とおく。この時

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \mathbf{O} \quad (\text{零行列})$$

よって、

$$J^n = (N + 2E)^n$$

$$= \sum_{k=0}^n {}^nC_k 2^{n-k} N^k E^{n-k} \quad \because EN = NE$$

$$= {}^nC_1 2^{n-1} N + {}^nC_0 2^n E$$

$$\because N^2 = \mathbf{O}$$

$$= n \cdot 2^{n-1} N + 2^n E$$

$$= n \cdot 2^{n-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 2^n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2^n & n \cdot 2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \quad (n \geq 1) \quad \dots\dots (\text{答})$$

$$(b) \quad T = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

とおく。この時

$$\det T = 2^2 - 3 \cdot 1$$

$$= 1 \neq 0$$

よって、 T には逆行列 T^{-1} が存在する
仮定より

$$AT = TJ$$

$$\Leftrightarrow T^{-1}AT = J$$

よって

$$(T^{-1}AT)^n = J^n$$

$$\Leftrightarrow T^{-1}A^nT = J^n$$

$$\Leftrightarrow A^n = TJ^nT^{-1}$$

よって

$$A^n = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & n \cdot 2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{n+1} - n \cdot 2^{n-1} & -3 \cdot 2^n + n \cdot 2^n \\ -2^n & 2^{n+1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2^{n+2} - n \cdot 2^n - 3 \cdot 2^n & -3 \cdot 2^{n+1} + n \cdot 2^{n+1} + 3 \cdot 2^{n+1} \\ \cancel{2^{n+1}} - n \cdot 2^{n-1} - \cancel{2^{n+1}} & -3 \cdot 2^n + n \cdot 2^n + 2^{n+2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2^n - n \cdot 2^n & n \cdot 2^{n+1} \\ -n \cdot 2^{n-1} & 2^n + n \cdot 2^n \end{pmatrix} \quad (n \geq 1)$$

$\dots\dots (\text{答})$

$$(2) \quad y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$y' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

求める弧長 l は

$$\ast 5 = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad x = \log(5+2\sqrt{6})$$

$$l = 2 \int_0^{\log(5+2\sqrt{6})} \sqrt{1 + \left[\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\right]^2} dx$$

$$= \int_0^{\log(5+2\sqrt{6})} (e^x + e^{-x}) dx$$

$$= [e^x - e^{-x}]_0^{\log(5+2\sqrt{6})}$$

$$= (5+2\sqrt{6}) - \frac{1}{5+2\sqrt{6}}$$

$$= 4\sqrt{6}$$

$\dots\dots (\text{答})$

$$(1) \quad f(x) = (e^{-x} + e^x) \cos x - 2x - \int_0^x (x-t)f'(t)dt \quad \dots\dots ①$$

$$\Leftrightarrow f(x) = (e^{-x} + e^x) \cos x - 2x - \left\{ x \int_0^x f'(t)dt - \int_0^x t f'(t)dt \right\} \quad \dots\dots ②$$

①の両辺に $x=0$ を代入して

$$f(0) = (e^0 + e^0) \cos 0 - 2 \cdot 0 - \int_0^0 (x-t)f'(t)dt$$

$$\Leftrightarrow \underline{f(0) = 2} \quad \dots\dots \text{(答)}$$

②の両辺を x で微分して

$$f'(x) = (-e^{-x} + e^x) \cos x + (e^{-x} + e^x)(-\sin x) - 2 - \left\{ \int_0^x f'(t)dt + x \cancel{f'(x)} - x \cancel{f'(x)} \right\} \quad \dots\dots ③$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = (-e^{-x} + e^x) \cos x - (e^{-x} + e^x) \sin x - 2 - [f(t)]_0^x$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = (-e^{-x} + e^x) \cos x - (e^{-x} + e^x) \sin x - 2 - \{f(x) - f(0)\}$$

$$\Leftrightarrow f(x) + f'(x) = (-e^{-x} + e^x) \cos x - (e^{-x} + e^x) \sin x \quad \because f(0) = 2 \quad \dots\dots ④$$

④の両辺に $x=0$ を代入して

$$f'(0) = \cancel{(-e^0 + e^0) \cos 0} + \cancel{(e^0 + e^0) \sin 0} - 2 - \int_0^0 \cancel{f'(t)dt}$$

$$\Leftrightarrow \underline{f'(0) = -2} \quad \dots\dots \text{(答)}$$

$$(2) \quad g(x) = e^x f(x),$$

$$g'(x) = e^x f(x) + e^x f'(x)$$

$$= e^x (f(x) + f'(x))$$

$$= e^x \{ (-e^{-x} + e^x) \cos x - (e^{-x} + e^x) \sin x \} \quad \dots\dots ④$$

$$= (-1 + e^{2x}) \cos x - (1 + e^{2x}) \sin x$$

$\dots\dots \text{(答)}$

$$(3) \quad g(x) = \int g'(x) dx$$

$$= \int \{ (-\cos x - \sin x) + e^{2x} (\cos x - \sin x) \} dx \quad \because (2) \quad \dots\dots ⑤$$

初めに、不定積分：

$$\int e^{2x} (\cos x - \sin x) dx$$

の計算をする。

$$(e^{2x} (A \cos x + B \sin x))'$$

$$= 2e^{2x} (A \cos x + B \sin x)$$

$$+ e^{2x} (-A \sin x + B \cos x)$$

$$= e^{2x} \cdot \{ (2A + B) \cos x + (2B - A) \sin x \}$$

よって

$$\begin{cases} 2A + B = 1 \\ 2B - A = -1 \end{cases} \Leftrightarrow (A, B) = \left(\frac{3}{5}, -\frac{1}{5} \right)$$

よって

$$\int e^{2x} (\cos x - \sin x) dx$$

$$= e^{2x} \left(\frac{3}{5} \cos x - \frac{1}{5} \sin x \right) + C \quad \dots\dots ⑥$$

(ただし、 C は積分定数)

次に $f(x)$ を求めよう。⑤⑥より

$$g(x) = -\sin x + \cos x$$

$$+ e^{2x} \left(\frac{3}{5} \cos x - \frac{1}{5} \sin x \right) + C'$$

$\dots\dots ⑦$

(ただし、 C' は積分定数)

$$g(0) = e^0 f(0)$$

$$= 2 \quad \because (1) \text{ の結果}$$

よって

$$2 = \cancel{-\sin 0} + \cos 0 + e^0 \left(\frac{3}{5} \cos 0 - \frac{1}{5} \cancel{\sin 0} \right) + C'$$

$$\Leftrightarrow C' = \frac{2}{5} \quad \dots\dots ⑧$$

したがって、⑤⑧より

$$g(x) = -\sin x + \cos x$$

$$+ e^{2x} \left(\frac{3}{5} \cos x - \frac{1}{5} \sin x \right) + \frac{2}{5}$$

$$\Leftrightarrow \underline{f(x) = e^{-x} \left(-\sin x + \cos x + \frac{2}{5} \right)}$$

$$+ e^x \left(\frac{3}{5} \cos x - \frac{1}{5} \sin x \right) \quad \dots\dots \text{(答)}$$

$$\therefore f(x) = e^{-x} g(x)$$