

1

(1)

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ
3	2	1	5	2	6	7	2	7	2	7	2	7	2

$$\begin{aligned}
 f_n(x) &= \log_6 x - 4\log_6 x + \cdots + n(-2)^{n-1} \log_6 x \\
 &= \log_6 x - \frac{4\log_6 x}{\log_6 6^2} + \cdots + \frac{n(-2)^{n-1} \log_6 x}{\log_6 6^n} \\
 &= (1 - 2 + \cdots + (-2)^{n-1}) \log_6 x \\
 &= \frac{1 - (-2)^n}{1 - (-2)} \log_6 x = \frac{1 - (-2)^n}{3} \log_6 x
 \end{aligned}$$

と書き換えられることに注意して解く.

$$(a) f_3(6) = \frac{1 - (-8)}{3} = 3, f_6(6) = \frac{1 - 64}{3} = -21$$

(b) n が整数のとき, $\cos n\pi = (-1)^n$ なので

$$\begin{aligned}
 \frac{1 - (-2)^n}{3} \log_6 x &> \frac{1 - (-2)^n}{12} \log_6 (18x^2 - 25) \\
 \{1 - (-2)^n\} \log_6 x^4 &> \{1 - (-2)^n\} \log_6 (18x^2 - 25) \\
 \{1 - (-2)^n\} \{\log_6 x^4 - \log_6 (18x^2 - 25)\} &> 0
 \end{aligned}$$

n が奇数のとき, $1 - (-2)^n > 0$ より

$$\begin{aligned}
 \log_6 x^4 - \log_6 (18x^2 - 25) &> 0 \\
 \frac{x^4}{18x^2 - 25} &> 1 \\
 x^4(18x^2 - 25) &> (18x^2 - 25)^2 \\
 (18x^2 - 25)(x^4 - 18x^2 + 25) &> 0
 \end{aligned}$$

真数条件から $18x^2 - 25 > 0$ なので $x^4 - 18x^2 + 25 > 0$. したがって

$$x^2 < 9 - 2\sqrt{14}, \quad 9 + 2\sqrt{14} < x^2$$

$$\sqrt{2} - \sqrt{7} < x < \sqrt{7} - \sqrt{2}, \sqrt{7} + \sqrt{2} < x$$

これに真数条件である $18x^2 - 25 > 0 \Leftrightarrow \frac{5\sqrt{2}}{6} < x$ と $x > 0$ を加えると

$$\frac{5\sqrt{2}}{6} < x < \sqrt{7} - \sqrt{2}, \quad \sqrt{7} + \sqrt{2} < x$$

n が偶数のとき, $1 - (-2)^n < 0$ より

$$\begin{aligned}
 \log_6 x^4 - \log_6 (18x^2 - 25) &< 0 \\
 (18x^2 - 25)(x^4 - 18x^2 + 25) &< 0
 \end{aligned}$$

真数条件から $18x^2 - 25 > 0$ なので $x^4 - 18x^2 + 25 < 0$. したがって

$$9 - 2\sqrt{14} < x^2 < 9 + 2\sqrt{14}$$

これに真数条件を加えると

$$\sqrt{7} - \sqrt{2} < x < \sqrt{7} + \sqrt{2}$$

(2)

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ
9	1	0	7	1	0	2	9	3	0	4	2	6	1	5	1

(a) 1 秒後の P の座標 (x_1, y_1) は $(0, 5), (2, 1)$ の 2 通りを, どちらも確率 $\frac{1}{2}$ でとる. したがって, $(x_2, y_2) = (1, 4)$ となる確率は

$$\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{9}{10}$$

また, 確率 $\frac{1}{10}$ で $(x_2, y_2) = (3, 0)$ をとるので, $(x_3, y_3) = (2, 3)$ となる確率は

$$\frac{9}{10} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{10} \cdot 1 = \frac{7}{10}$$

(b) $n = 1$ では $2x_1 + y_1 = 5$ が, $n = 2$ では $2x_2 + y_2 = 6$, $n = 3$ では $2x_3 + y_3 = 7$ が成り立つ. また, $2x_n + y_n = a_n$ とおくと

$$2x_{n+1} + y_{n+1} = \begin{cases} 2(x_n - 1) + y_n + 3 = a_n + 1 \\ 2(x_n + 1) + y_n + 1 = a_n + 1 \end{cases}$$

より, 数列 $\{a_n\}$ は x_n, y_n に依存せず, $a_n = n + 4$ で表されることがわかる. したがって

$$2x_5 + y_5 = 9$$

ここで, $(x_{n+1}, y_{n+1}) = (x_n - 1, y_n + 3)$ を 1 回, $(x_{n+1}, y_{n+1}) = (x_n + 1, y_n - 1)$ を 3 回選ぶことで $(x_{n+4}, y_{n+4}) = (x_n + 2, y_n)$ に辿り着け, 同様に 2 回ずつ選ぶことで $(x_{n+4}, y_{n+4}) = (x_n, y_n + 4)$ に辿り着くことができる.

このことから, n 秒後にとりうる点が A_n 通りあるとすれば, $A_{n+4} = A_n + 1$ となる.

以上より, x_5 は $x_5 = 0, 2, 4$ の 3 通りあり, 最小値は 0, 最大値は 4 である.

(c) 同様に, x_{100} は 26 通りあり, その最小値は 1, 最大値は 51 である.

(3)

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ
1	7	1	7	1	2	1	3	8	1	7	2	1	1	1	2

(a) 2 つの放物線が異なる 2 点で交わるための条件は, 方程式

$$-x^2 + 4 = x^2 - 2mx + m^2 + m + 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 2mx + m^2 + m - 3 = 0$$

が異なる 2 つの実数解を持つ条件と同値なので,

$$\text{判別式 } D = (2m)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (m^2 + m - 3) = -4m^2 - 8m + 24 > 0$$

$$\therefore -1 - \sqrt{7} < m < -1 + \sqrt{7}$$

(b) 解と係数の関係から

$$\alpha\beta = \frac{m^2 + m - 3}{2} = \frac{1}{2} \left(m + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{13}{8}$$

なので, $m = -\frac{1}{2}$ のとき $\alpha\beta$ は最小値 $-\frac{13}{8}$ をとる.

また同様に $\alpha + \beta = m$ から,

$$\begin{aligned}
 (\alpha - \beta)^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \\
 &= -m^2 - 2m + 6 \\
 &= -(m + 1)^2 + 7
 \end{aligned}$$

となるので, $\alpha > \beta$ より, $m = -1$ のとき $\alpha - \beta$ は最大値 $\sqrt{7}$ をとる.

(c) 点 P, Q における接線の式は

$$\begin{cases} y = -2\alpha(x - \alpha) - \alpha^2 + 4 = -2\alpha x + \alpha^2 + 4 \\ y = -2\beta(x - \beta) - \beta^2 + 4 = -2\beta x + \beta^2 + 4 \end{cases}$$

なので, その交点 (X, Y) は

$$X = \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{m}{2}$$

$$Y = -\alpha\beta + 4 = -\frac{m^2}{2} - \frac{m}{2} + \frac{11}{2}$$

となるので, $m = 2X$ を Y の式に代入すると

$$Y = -2X^2 - X + \frac{11}{2}$$

より, 点 R の軌跡は

$$y = -2x^2 - x + \frac{11}{2}$$

2

(1)

(a) $t = e^x$ と置換すると

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= \int \frac{t}{t^2 + 5t + 4} \frac{dt}{t} \\ &= \int \frac{dt}{(t+1)(t+4)} \\ &= \frac{1}{3} \int \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+4} \right) dt \\ &= \frac{1}{3} \{ \log(t+1) - \log(t+4) \} + C \quad (\text{ただし } C \text{ は積分定数})\end{aligned}$$

(b) (a) から

$$\begin{aligned}\int_0^a f(x)dx &= \frac{1}{3} \{ \log(e^a + 1) - \log(e^a + 4) \} - \frac{1}{3} (\log 2 - \log 5) \\ &= \frac{1}{3} \log \frac{5(e^a + 1)}{2(e^a + 4)} = \frac{1}{3} \log 2 \\ \therefore \frac{5(e^a + 1)}{2(e^a + 4)} &= 2 \\ \therefore e^a &= 11 \\ \therefore a &= \log 11\end{aligned}$$

(2)

(a) 与式から

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\theta} = \sin \theta \\ \frac{dy}{d\theta} = 1 - \cos \theta \end{cases}$$

したがって

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{d\theta} \frac{d\theta}{dx} = \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) \\ &= \frac{d\theta}{dx} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \right) \\ &= \frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{1 - \cos \theta}{\sin^2 \theta} \\ &= \frac{1 - \cos \theta}{\sin^3 \theta}\end{aligned}$$

(b) $\tan \frac{\theta}{2} = 2$ より

$$\begin{aligned}\cos^2 \frac{\theta}{2} &= \left(1 + \tan^2 \frac{\theta}{2} \right)^{-1} = \frac{1}{5} \\ \therefore \cos \theta &= 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1 = -\frac{3}{5} \\ \tan \theta &= \frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}} = -\frac{4}{3} \\ \therefore \sin \theta &= \cos \theta \tan \theta = \frac{4}{5}\end{aligned}$$

以上のことから

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{1 - (-\frac{3}{5})}{\frac{4}{5}} = 2 \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{1 - (-\frac{3}{5})}{(\frac{4}{5})^3} = \frac{25}{8}\end{aligned}$$

3

(1)

接点を $(2 \cos \theta, \sin \theta)$ とすると

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{\cos \theta}{-2 \sin \theta} = m \\ \frac{-1}{2 \tan \theta} &= m \\ \tan \theta &= -\frac{1}{2m}\end{aligned}$$

したがって

$$\cos \theta = \pm \frac{2m}{\sqrt{4m^2 + 1}}, \quad \sin \theta = \mp \frac{1}{\sqrt{4m^2 + 1}} \quad (\text{複号同順})$$

このことから

$$l_1: y = m \left(x + \frac{4m}{\sqrt{4m^2 + 1}} \right) + \frac{1}{\sqrt{4m^2 + 1}} = mx + \sqrt{4m^2 + 1}$$

$$l_2: y = m \left(x - \frac{4m}{\sqrt{4m^2 + 1}} \right) - \frac{1}{\sqrt{4m^2 + 1}} = mx - \sqrt{4m^2 + 1}$$

(2)

点 P は円 C と直線 $y = mx$ の交点なので, その x 座標は

$$\begin{aligned}x^2 + (mx)^2 &= 4 \\ x^2 &= \frac{4}{m^2 + 1} \\ x &= \pm \frac{2}{\sqrt{m^2 + 1}}\end{aligned}$$

ここで点 P は第 1 象限にあるから $x > 0$ より

$$P \left(\frac{2}{\sqrt{m^2 + 1}}, \frac{2m}{\sqrt{m^2 + 1}} \right)$$

したがって, 点 Q は

$$Q \left(\frac{2}{\sqrt{m^2 + 1}}, \frac{m}{\sqrt{m^2 + 1}} \right)$$

(3)

対称性から, 求める円の中心は直線 $y = mx$ 上にある. また, 直線 l_1 と原点との距離 r は

$$r = \frac{\sqrt{4m^2 + 1}}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

なので, 求める円の式は

$$(x - a)^2 + (y - ma)^2 = \frac{4m^2 + 1}{m^2 + 1}$$

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2may + (m^2 + 1)a^2 - \frac{4m^2 + 1}{m^2 + 1} = 0$$

(4)

(3) の式において, (x, y) に点 Q の座標を代入すると

$$\frac{4 + m^2}{m^2 + 1} - \frac{4 + 2m^2}{\sqrt{m^2 + 1}}a + (m^2 + 1)a^2 - \frac{4m^2 + 1}{m^2 + 1} = 0$$

$$(m^2 + 1)a^2 - \frac{2(m^2 + 2)}{\sqrt{m^2 + 1}} + \frac{-3(m^2 - 1)}{m^2 + 1} = 0$$

$$a = \frac{3}{\sqrt{m^2 + 1}}, \frac{1 - m^2}{\sqrt{m^2 + 1}^3}$$

ここで $\frac{3}{\sqrt{m^2 + 1}} > \frac{1 - m^2}{\sqrt{m^2 + 1}^3}$ なのでこの値を代入して

$$\left(x - \frac{3}{\sqrt{m^2 + 1}} \right)^2 + \left(y - \frac{3m}{\sqrt{m^2 + 1}} \right)^2 = \frac{4m^2 + 1}{m^2 + 1}$$