

番号	ア	イ	ウ	エ	オ	カ
答	5	7	1	3	2	3
番号	キ	ク	ケ	コ	ク	シ
答	3	8	3	8	3	2
番号	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ
答	2	4	2	4	2	3
番号	テ	ト	ナ	ニ	ヌ	ネ
答	4	5	1	2	5	7
番号	ノ	ハ	ヒ	フ	ヘ	
答	2	1	9	2	4	

$$\begin{aligned}
 (1) \quad h(x) &= f(x) - g(x) \\
 &= a \log x + b - \left(\frac{x^2}{a} + x \right) \\
 h'(x) &= a \cdot \frac{1}{x} - \left(\frac{2x}{a} + 1 \right)
 \end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned}
 h'(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{a}{x} - \frac{2x}{a} - 1 = 0 \\
 &\Leftrightarrow -2x^2 - ax + a^2 = 0 \quad \because \begin{cases} x > 0 \\ a > 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow 2x^2 + ax - a^2 = 0 \\
 &\Leftrightarrow (2x - a)(x + a) = 0 \\
 &\Leftrightarrow x = \frac{a}{2} \quad \because \begin{cases} x > 0 \\ a > 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

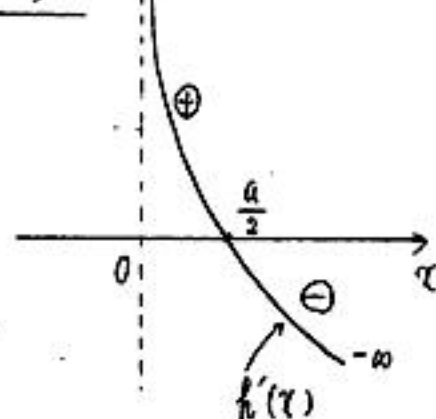
----- (答)

(2) $y = h(x)$ ($x > 0$) の増減を調べる

$$\begin{aligned}
 h'(x) &= \frac{-2x^2 - ax + a^2}{ax} \\
 &= \frac{-(2x - a)(x + a)}{ax}
 \end{aligned}$$

よって、 $h(x)$ の増減表

は、次の通りである。



x	(0)	----	$\frac{a}{2}$	----
$h'(x)$		+	0	-
$h(x)$		↗	極大	↘

$$\begin{aligned}
 h\left(\frac{a}{2}\right) &= a \log \frac{a}{2} + b - \left\{ \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2}{a} + \frac{a}{2} \right\} \\
 &= a \log \frac{a}{2} + b - \frac{3}{4}a,
 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left\{ \frac{a \log x}{x^2} + \frac{b}{x^2} - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{x} \right) \right\} = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0+0} a \log x + b - \left(\frac{x^2}{a} + x \right) = -\infty.$$

したがって、

「 $y = f(x)$ ($x > 0$) と $y = g(x)$ ($x > 0$)

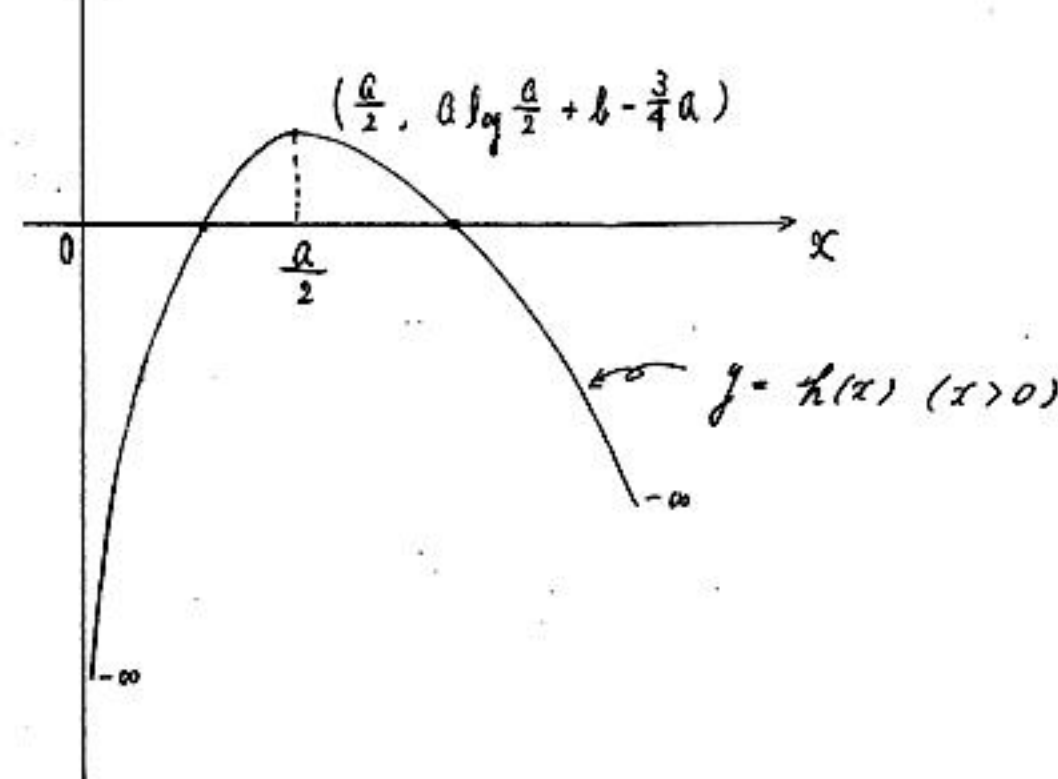
には、共有点が存在する。」

「方程式: $h(x) = 0$

$\Leftrightarrow$ には、 $x > 0$ と満たす実数解が存在する。」

$\Leftrightarrow h\left(\frac{a}{2}\right) \geq 0 \quad \because h(x) (x > 0)$ は連続関数

$\Leftrightarrow b \geq -a \log \frac{a}{2} + \frac{3}{4}a$ ----- 答



$$(3) \quad F(a) = a \log \frac{a}{2} + b - \frac{3}{4}a \quad (a > 0)$$

の増減を調べる。

$$\begin{aligned}
 F'(a) &= \log \frac{a}{2} + a \cdot \frac{\frac{1}{2}}{\frac{a}{2}} - \frac{3}{4} \\
 &= \log \frac{a}{2} + \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

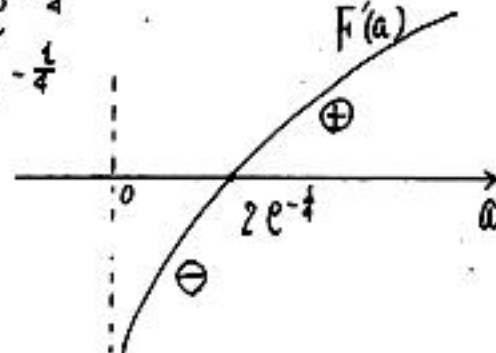
よって、

$$\begin{aligned}
 F'(a) = 0 &\Leftrightarrow \log \frac{a}{2} + \frac{1}{4} = 0 \\
 &\Leftrightarrow \log \frac{a}{2} = \log e^{-\frac{1}{4}} \\
 &\Leftrightarrow \frac{a}{2} = e^{-\frac{1}{4}} \\
 &\Leftrightarrow a = 2e^{-\frac{1}{4}}
 \end{aligned}$$

よって、 $F(a)$ の増減

表は、次の通りである。

a	(0)	----	$2e^{-\frac{1}{4}}$	----
$F'(a)$		-	0	+
$F(a)$		↘	極小	↗



また、

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} F(a) = \lim_{a \rightarrow +\infty} a \log \frac{a}{2} \left(1 + \frac{b}{a \log \frac{a}{2}} - \frac{3}{4 \log \frac{a}{2}} \right) = +\infty,$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{a \rightarrow 0+0} F(a) &= \lim_{a \rightarrow 0+0} a \log \frac{a}{2} + b - \frac{3}{4}a \\
 &= b \quad \because \lim_{a \rightarrow 0+0} a \log \frac{a}{2} = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F(2e^{-\frac{1}{4}}) &= 2e^{-\frac{1}{4}} \log \frac{1}{2} \cdot 2e^{-\frac{1}{4}} + b - \frac{3}{4} \cdot 2e^{-\frac{1}{4}} \\
 &= -2e^{-\frac{1}{4}} + b
 \end{aligned}$$

したがって、

「任意の正の定数 a について、

$y = f(x)$ ($x > 0$) と $y = g(x)$ ($x > 0$)

には、共有点が存在する。」

$\Leftrightarrow$ 「任意の正の定数 a について、

方程式: $h(x) = 0$

には、 $x > 0$ と満たす実数解が存在する。」

$\Leftrightarrow$ 「任意の正の定数 a について、

$h\left(\frac{a}{2}\right) \geq 0$

が成立する。」

$\Leftrightarrow F(2e^{-\frac{1}{4}}) \geq 0$

$\Leftrightarrow b \geq 2e^{-\frac{1}{4}}$

よって、求める b の最小値は、

$2e^{-\frac{1}{4}}$ ----- 答

(1) 数列 $\{a_n\}$ を求めよ.

$$\int_{a_j}^{a_{j+1}} \frac{dx}{5x+1} = \frac{\log 6}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{5} [\log(5x+1)]_{a_j}^{a_{j+1}} = \frac{\log 6}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{5} \{ \log(5a_{j+1}+1) - \log(5a_j+1) \} = \frac{\log 6}{5}$$

$$\Leftrightarrow \log \frac{5a_{j+1}+1}{5a_j+1} = \log 6$$

$$\Leftrightarrow \frac{5a_{j+1}+1}{5a_j+1} = 6 \quad \because \left[\log x \text{ は単調増加関数である} \right]$$

$$\Leftrightarrow a_{j+1} = 6a_j + 1$$

$$\Leftrightarrow a_{j+1} + \frac{1}{5} = 6 \left(a_j + \frac{1}{5} \right)$$

よって

$$\begin{aligned} a_j &= 6^{j-1} \left(a_1 + \frac{1}{5} \right) - \frac{1}{5} \\ &= 6^{j-1} \left(1 + \frac{1}{5} \right) - \frac{1}{5} \\ &= \frac{1}{5} (6^j - 1) \quad (j \geq 1) \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} \frac{b_j}{b_{j+1}} &= \frac{f(a_j)}{f(a_{j+1})} \\ &= \frac{1}{5 \cdot \frac{1}{5} (6^j - 1) + 1} \\ &= \frac{1}{5 \cdot \frac{1}{5} (6^j - 1) + 1} \\ &= \frac{6^{j+1}}{6^j} \\ &= 6 \quad \cdots \cdots \text{(答)} \end{aligned}$$

(2) $y = \frac{1}{5x+1}$

$$y' = -\frac{5}{(5x+1)^2}$$

初めに、数列 $\{x_j\}$ を求めよ.

$P_j(x_j, y_j)$ における接線の方程式は

$$y - y_j = -\frac{5}{(5x_j+1)^2} (x - x_j) \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

② から $(a_{j+1}, 0)$ を通るから

$$0 - y_j = -\frac{5}{(5x_j+1)^2} (a_{j+1} - x_j)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{5x_j+1} = -\frac{5}{(5x_j+1)^2} (a_{j+1} - x_j) \quad \because y_j = f(x_j)$$

$$\Leftrightarrow 5x_j + 1 = 5(a_{j+1} - x_j)$$

$$\Leftrightarrow x_j = \frac{1}{2} a_{j+1} - \frac{1}{10}$$

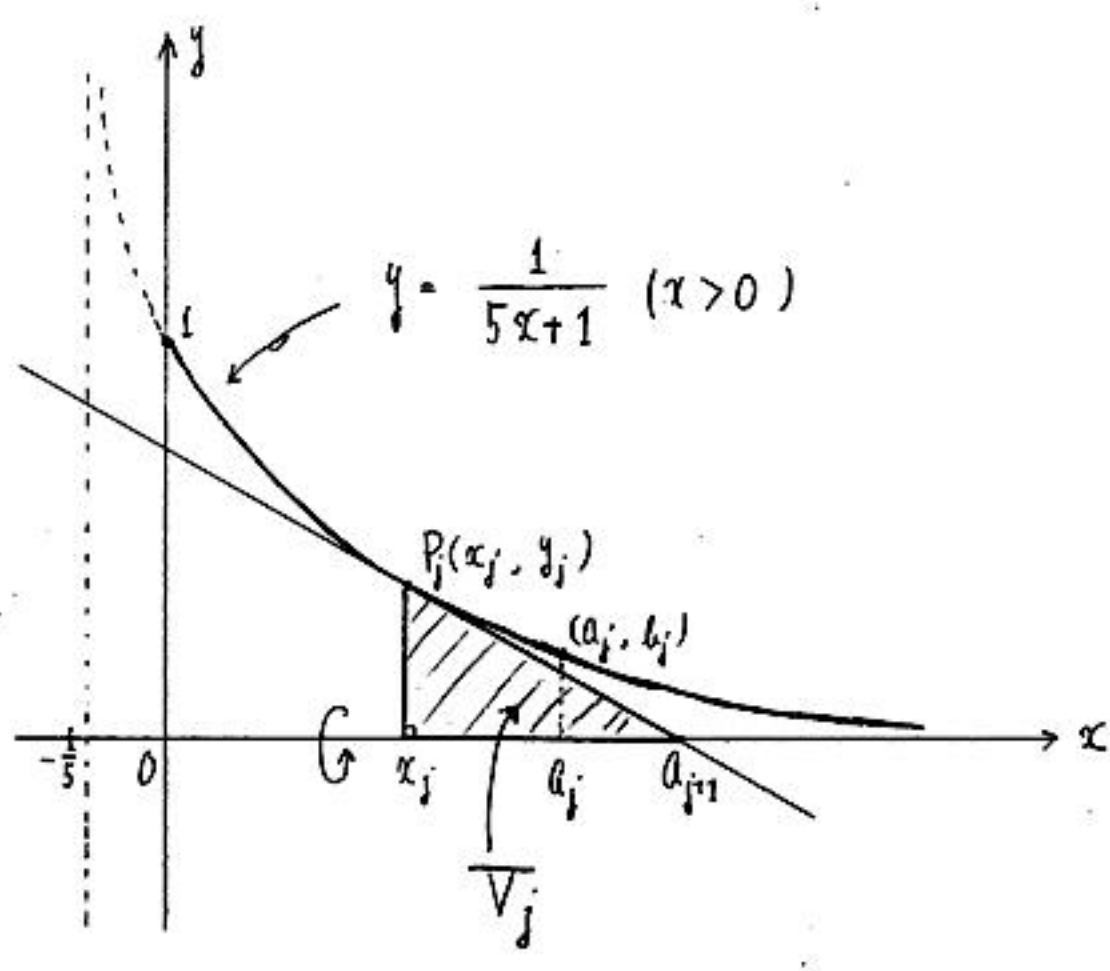
$$\Leftrightarrow x_j = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} (6^{j+1} - 1) - \frac{1}{10} \quad \because \textcircled{1}$$

$$\Leftrightarrow x_j = \frac{1}{5} (3 \cdot 6^j - 1) \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

次に、 $\frac{y_j}{b_{j+1}}$ を求めよ

$$\begin{aligned} \frac{y_j}{b_{j+1}} &= \frac{f(x_j)}{f(a_{j+1})} \\ &= \frac{1}{5 \cdot \frac{1}{5} (3 \cdot 6^j - 1) + 1} \quad \because \textcircled{3} \\ &= \frac{1}{5 \cdot \frac{1}{5} (3 \cdot 6^j - 1) + 1} \\ &= \frac{6^{j+1}}{3 \cdot 6^j} \\ &= 2 \quad \cdots \cdots \text{(答)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad V_j &= \frac{\pi}{3} (a_{j+1} - x_j) y_j^2 \\ &= \frac{\pi}{3} (a_{j+1} - x_j) \cdot \left(f(x_j) \right)^2 \\ &= \frac{\pi}{3} \cdot \left\{ \frac{1}{5} (6^{j+1} - 1) - \frac{1}{5} (3 \cdot 6^j - 1) \right\} \\ &\quad \cdot \left(\frac{1}{5 \cdot \frac{1}{5} (3 \cdot 6^j - 1) + 1} \right)^2 \quad \because \textcircled{3} \\ &= \frac{\pi}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot 6^j \cdot \left(\frac{1}{3 \cdot 6^j} \right)^2 \\ &= \frac{\pi}{45} \cdot \left(\frac{1}{6} \right)^j \quad (j \geq 1) \quad \cdots \cdots \text{(答)} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} (4) \quad \sum_{j=1}^{\infty} V_j &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\pi}{270} \cdot \left(\frac{1}{6} \right)^j \\ &= \frac{\pi}{270} \cdot \frac{\frac{1}{6}}{1 - \frac{1}{6}} \quad \because \left[\begin{array}{l} \text{公比 } 0 < \frac{1}{6} < 1 \\ \text{よって } \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{6} \right)^j \text{ は収束する} \end{array} \right] \\ &= \frac{1}{225} \pi \quad \cdots \cdots \text{(答)} \end{aligned}$$